Math. P. 740 n (1,1

Sammlung

geometrischer

Aufgaben und Lehrsätze

mit

synthetischen Auflösungen und Beweisen,

als Material

des

Unterrichts in der Elementar-Geometrie

von

Dr. Ludwig Thilo.

Erster Band.

Enthaltend, als Einleitung, eine Abhandlung über die geometrischen Aufgaben und Lehrsätze überhaupt, und aus der Planimetrie die Aufgaben und Lehrsätze, welche die Congruenz und Gleichheit der Figuren betreffen.

Mit 8 Kupfertafeln.

Frankfurt am Main,
gedruckt und verlegt bei Johann David Sauerländer.

1824.

Materialien

für den Unterricht

in der

Elementar-Geometrie

von

Dr. Ludwig Thilo,

Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium
zu Frankfurt a. M.

Erster Theil.

Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze
mit synthetischen Auflösungen und Beweisen.

Erster Band.

Mit 8 Kupfertafeln.

Bayer. Staatsministerium
f. Ernährung, Landwirtschaft u. Forsten
Ministerialforstabteilung
Bücherei

Aa 2 / 35

Frankfurt am Main,

gedruckt und verlegt bei Johann David Sauerländer.

1824.

Kgl. Bayr. Ministerial Forstabteilung
592
gd 163/3021
593

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Herrn

Johann Theodor Vömel,

Rector und Professor des Gymnasiums,

widmet diese Sammlung

aus

Freundschaft, Hochachtung und Dankbarkeit

der

Verfasser.

Vorrede.

Ich übergebe hiermit dem Publikum den ersten Band eines zur Beförderung des mathematischen Unterrichts unternommenen Werks. Der zweyte wird, wenn nicht unvorhergesehene Hindernisse eintreten, zur Herbstmesse nachfolgen. Er bildet mit dem ersten eine Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze, welche sich über alle Abschnitte der Planimetrie erstreckt, und so ein Ganzes für sich ausmacht. Ueber die beabsichtigte Ausdehnung des größeren Werks, deren Verwirklichung von der Aufnahme des Publikums abhängen wird, darf ich jetzt noch schweigen. Nur mögen hier durch nähere Erläuterung der Titel, wenigstens negativ, die Gränzen festgesetzt werden, die dasselbe nicht überschreiten soll.

Materialien für den Unterricht. Dahin rechne ich sowohl eigentlichen Lehrstoff, der den Schülern vorgetragen oder sonst mit den Schülern verarbeitet werden kann, als auch gewisse reelle Kenntnisse, die dem Lehrer der Mathematik, als solchem, wissenswerth sind. Aber keine Abhandlung über eine vorzugsweise empfohlene Methode des mathematischen Unterrichts; keine Anweisungen und Vorschriften, was der Lehrer, und wie er es lehren soll. Im Gegentheil

soll die Masse des hier mitgetheilten, aus der systematischen Verkettung absichtlich heraus gerissenen Lehrstoffs vielmehr zu eigener Auswahl und zu eigenthümlichem Gebrauche veranlassen und in Stand setzen. Bemerkungen aber, die ich mir über die Anwendung der gelieferten Materialien beym Unterricht zu machen erlaubt habe, bitte ich, nicht als Vorschriften über Methode anzusehen.

Elementar-Geometrie. Ausgeschlossen aus dem Plane des ganzen Werks sind: die Trigonometrie, die Kegelschnitte, und, wie sich von selbst versteht, die noch höheren Theile der Mathematik.

Aufgaben und Lehrsätze mit synthetischen Auflösungen und Beweisen. Diese sind der Gegenstand des ersten Theils der sämmtlichen Materialien. In diesem ersten Theile also keine Anwendung der Algebra oder der Analysis der Alten. Zwey Bände dieses ersten Theils enthalten, wie gesagt, die Aufgaben und Lehrsätze aus der Planimetrie. Die aus der Stereometrie bleiben einem dritten Bande vorbehalten.

Was mich zu der Sammlung und Herausgabe von geometrischen Aufgaben und Lehrsätzen bewogen hat, ist in der Einleitung S. 136 und 148 erwähnt. Daselbst wird auch, S. 136 bis 151, der Gebrauch und die Einrichtung dieser Sammlung aus einander gesetzt. Dasjenige Buch, mit dem das vorliegende in Hinsicht auf Inhalt und Einrichtung die meiste Aehnlichkeit hat, ist des Clavius, der im 16ten Jahrhundert lebte, in

Lateinischer Sprache abgefaßter Commentar zum Euklid. Denn die ausführlicheren Lehrbücher der Geometrie, wie des Simpson, Legendre, Van Swinden, Gilbert, lassen, wegen der systematischen, Verflechtung ihrer Sätze, den, vom Lehrer gewünschten, aphoristischen Gebrauch nicht ohne Schwierigkeit, wenigstens nicht ohne mancherley Unbequemlichkeit, zu. Und die Sammlungen geometrischer Aufgaben, die wir besitzen (unter welchen die von Meier Hirsch die bekannteste,) sind, indem sie die Algebra, Trigonometrie, oder die Analysis der Alten anwenden, mehr der Erweiterung erworbener Kenntnisse, als der ersten Erwerbung gewidmet. So sind von den 229 Artikeln unseres ersten Bandes höchstens 5 ebenfalls in Meier Hirsch enthalten.

Die Schriften, denen ich die einzelnen Aufgaben und Lehrsätze entnommen habe, sind jedesmal angeführt. Obgleich dieses vorzüglich in der Absicht geschah, dem Leser damit eine literarische oder historische Notiz über den geometrischen Satz zu geben; so lag es doch außer meinem Zwecke, hierbey mit Zeit opfernder Gründlichkeit zu Werke zu gehen. Ich habe mich daher begnügt, in den meisten Fällen immer nur denjenigen Schriftsteller zu citiren, den ich unmittelbar benutzte, oder der mir zuerst einfiel. Viele Sätze, auf die ich entweder selbst, oder auf die bey Gelegenheit der heuristischen Uebungen, ein Schüler gekommen war, und die ich kurz oder lange nachher gedruckt fand, habe ich alsbald mit dem gefundenen Citat versehen. Einigen Sätzen, die fast in allen Lehrbüchern vorkommen, ist keins hinzu gefügt worden. Was nun die übrigen, mit

keinem Citat begleiteten Sätze betrifft, so wäre es wohl misbilligt worden, wenn ich die Namen meiner jungen Freunde, denen ich sie verdanke, darunter gesetzt hätte. Nur glaube ich zwey junge Männer, welche die Mathematik und insbesondere das mathematische Lehrfach zu ihrem künftigen Berufe gewählt haben, die Herren D. Ryz aus dem Aargau, welcher seit einem Jahre von der Deutschen Universität heimgekehrt ist, und M. Reis von hier, der gegenwärtig in Göttingen studiert, mit Liebe und mit dem Wunsche hier nennen zu dürfen, daß sie von der Vorsehung recht bald mit einem seegensreichen Wirkungskreise beglückt werden möchten.

Unter den mancherley gedruckten Anweisungen über Methode des mathematischen Unterrichts ertheilt keine Rath, wie sich der Lehrer in einer oberen Gymnasial-Classe, von etwa 30 bis 40 Schülern zu benehmen habe, von welchen der eine vielleicht differentiirt und integrirt, während, durch alle Zwischenstufen hindurch, andere noch nicht dividiren können. Oder kommt ein solcher Fall an unsern Deutschen Gymnasien nicht vor? Wie viele Gymnasien gibt es denn, wo bey der Versetzung der Schüler in höhere Classen auf ihre Fortschritte in der Mathematik die nöthige Rücksicht genommen wird? Und doch sind in jedem andern Lehrfache die Schwierigkeiten, die aus der ungleichen Reife der Schüler entstehen, leichter zu überwinden, als gerade in der Mathematik. Mit desto größerem Danke habe ich das seltene Glück anzuerkennen, welches ich bis jetzt, mit Unterbrechung weniger Jahre, als Lehrer der Mathematik gehabt habe, daß mir dergleichen unübersteigliche Hin-

dernisse, die in der äußeren Einrichtung der Schule liegen, und an welchen des Lehrers eifrigste und treueste Bemühungen unvermeidlich scheitern müssen, willfährig und freundlich aus dem Wege geräumt wurden. Hier verdanke ich dieses Glück vorzüglich der pädagogischen Einsicht und dem frommen und reinen Willen des Rectors, der nicht sich im Auge hat, nicht sein Wirken und sein Gelten, sondern das Gedeihen der Anstalt und das Heil der ihr anvertrauten Zöglinge.

Frankfurt am Main, im Januar 1824.

Der Verfasser.

Inhalt

des

ersten Bandes.

Verzeichniß der Sätze aus der Lehre von den Proportionen und der Elementar-Geometrie, welche in der Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze vorausgesetzt werden. S. 1.

So wie unter diesen Sätzen die früher stehenden ohne Voraussetzung der nachfolgenden begründet worden waren; so ist die Sammlung der geometrischen Aufgaben und Lehrsätze selbst dergestalt nach denselben geordnet, daß ihre Auflösungen und Beweise immer nur solche Sätze des Verzeichnisses als Vordersätze voraussetzen, die bis zu dem überschriebenen §en darin enthalten sind.

Einleitung in die Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze. S. 27.

I. Ueber geometrische Aufgaben und Lehrsätze überhaupt. S. 28.

Es schien nicht am unrechten Orte, einer ziemlich ausgedehnten, vorzüglich dem Gebrauche des Lehrers bestimmten, Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze eine Abhandlung über den Begriff und die Form einer geometrischen Aufgabe und eines geometrischen Lehrsatzes als Einleitung vorauszuschicken. — Als Muster geometrischer Darstellung gelten die Elemente des Euklides. Dieß zu rechtfertigen, steht S. 30—46, eine Betrachtung über Euklid als Lehrer. — Die Form der geometrischen Darstellung war den alten Mathematikern und Philosophen eine große Angelegenheit. Noch heut zu Tage können wir uns aus keinen andern Schriften gründlicher und vielseitiger darüber belehren, als aus den ihrigen. Daher, und um den Lehrer der Geo-

metrie auf die Leistungen der Alten in diesem Fache aufmerksam zu machen, folgt, S. 46—70, eine Uebersetzung einiger Stellen aus Proklus über die verschiedenen Sätze in der Geometrie. — Der Inhalt dieser Stellen bezeugt nicht nur das Interesse der Alten an dieser Sache, sondern läßt auch erkennen, daß die Alten über das Einzelne hierher Gehörige sehr verschiedene Ansichten hatten. Daher beschließt diesen Abschnitt der Einleitung, S. 70—135, eine entschieden ausgesprochene Ansicht über das Verhältniß des Lehrsatzes und der Aufgabe zum System der Geometrie; und über die sich daraus ergebende Form für beyde.

II. Ueber den Gebrauch und die Einrichtung der Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze als Material des Unterrichts. S. 136.

Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze. S. 153.

Der Zweck dieser Sammlung, der, was den Gegenstand betrifft, weder auf Vollständigkeit in der Aufzählung, noch auf systematische Anordnung der darin enthaltenen Sätze hinaus ging, macht eine ausführlichere Angabe des Inhaltes überflüssig. Nur ist hier das Versehen, nach welchem über jeder Seite die Hinweisung auf den zuletzt überschriebenen §en unterblieben ist, durch folgende Uebersicht möglichst wieder gut zu machen.

	Seite		Seite
Nach §. 27 . . .	155	Nach §. 54 . . .	208
— §. 30 . . .	156	— §. 60 . . .	223
— §. 34 . . .	160	Zu §. 62 . . .	244
Zu §. 37 . . .	164	Nach §. 62 . . .	255
Nach §. 41 . . .	165	— §. 63 . . .	284
Zu §. 43 . . .	169	— §. 64 . . .	291
Nach §. 43 . . .	172	Zu §. 69 . . .	305
Zu §. 49 . . .	173	Nach §. 72 . . .	309
Nach §. 49 . . .	175	Zu §. 73 . . .	360
— §. 50 . . .	185	Nach §. 75 . . .	362
— §. 51 . . .	186	— §. 77 . . .	365
Zu §. 53 . . .	191	— §. 78 . . .	367
Nach §. 53 . . .	193	Zu §. 79 . . .	372
Zu §. 54 . . .	198	Nach §. 79 . . .	412

Verzeichniß der Sätze

aus der

Lehre von den Proportionen

und der

Elementar-Geometrie,

welche

in der Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze

vorausgesetzt werden.

Bemerkung. Die Römischen Zahlen, welche in der Sammlung der geometrischen Aufgaben und Lehrsätze (besonders im zweyten Bande) citirt werden, beziehen sich auf die eben so bezeichneten Sätze aus der Lehre von den geometrischen Proportionen; und die citirten § §. gehen auf die § §. der Sätze aus der Elementar=Geometrie. Diese sind mit den § §. des zweyten Haupttheils meines Lehrbuchs der reinen Elementar=Geometrie (Frankfurt a. M. 1820) von Seite 53 bis 98 vollkommen gleichzählend, so daß ich, wenn es im Geringsten nöthig wäre, weiter darauf verweisen könnte.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

A. Geometrische Proportionen.

I. Das Product der beyden äußeren Glieder einer geometrischen Proportion ist dem Product der beyden innern gleich.

II. Ein jedes Glied einer Proportion läßt sich durch die drey übrigen bestimmen, nämlich:

Das erste Glied ist gleich dem Product der beyden innern, dividirt durch das vierte.

Das zweyte Glied ist gleich dem Product der beyden äußern, dividirt durch das dritte.

Das dritte Glied ist gleich dem Product der beyden äußern, dividirt durch das zweyte.

Das vierte Glied ist gleich dem Producte der beyden innern, dividirt durch das erste.

III. Wenn zwey Producte einander gleich sind, so geben ihre vier Factoren acht Proportionen, wenn man die Factoren des einen Products entweder die äußern oder die innern Glieder ausmachen läßt.

IV. In einer jeden Proportion lassen sich also die Glieder noch auf sieben verschiedene Arten versetzen, so daß immer wieder eine richtige Proportion heraus kommt; wenn man dabey nur immer beobachtet, daß die beyden äußern Glieder wieder die beyden äußern bleiben, oder zugleich die beyden innern werden.

V. Wenn die Vorderglieder einer Proportion (d. h. das erste und dritte Glied) einander gleich sind, so sind auch die Hinterglieder einander gleich.

Eben so, wenn die Hinterglieder einander gleich sind, so sind es auch die Vorderglieder.

VI. Wenn zwey Größen einander gleich sind, so bilden sie mit jeder dritten eine Proportion.

VII. Man kann das Vorder- und Hinterglied eines Verhältnisses mit der nämlichen Zahl multipliciren oder beyde durch die nämliche Zahl dividiren, ohne daß die Proportion darunter leidet.

VIII. Es läßt sich auch das erste und dritte, oder das zweyte und vierte Glied mit derselben Zahl multipliciren oder durch dieselbe Zahl dividiren.

IX. Beyde Verhältnisse einer Proportion lassen sich mit demselben dritten Verhältnisse multipliciren. Es sey

$$a : b = c : d$$

und p : q irgend ein drittes Verhältniß, so ist

$$ap : bq = cp : dq$$

X. Wenn man zwey Proportionen hat, so kann man daraus eine dritte machen, indem man die Glieder von gleicher Ordnung in beyden mit einander multiplicirt.

Wenn

$$a : b = c : d$$

und

$$m : n = p : q$$

so ist auch

$$am : bn = cp : dq$$

Auf diese Art lassen sich so viele Proportionen, als man will, mit einander verbinden.

XI. Eben so kann man in zweyen Proportionen die Glieder der einen durch die Glieder von der gleichen Ordnung in der andern dividiren.

XII. Man kann alle Glieder einer Proportion zugleich quadriren, oder zugleich cubiren, oder auf irgend eine andere Potenz erheben.

XIII. Umgekehrt kann man au allen Gliedern dieselbe Wurzel ziehen.

XIV. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch

$$a + b : b = c + d : d$$

XV. Wenn a : b = c : d, so ist auch

$$a - b : b = c - d : d$$

XVI. Wenn zwey Proportionen gleiche Exponenten haben, so kann man eine dritte Proportion daraus zusammen setzen, indem man die Glieder von gleicher Ordnung zusammen addirt.

XVII. Auf gleiche Weise kann man in zweyen Proportionen von gleichen Exponenten die Glieder gleicher Ordnung von einander subtrahiren.

XVIII. Wenn in zwey Proportionen drey Glieder von derselben Ordnung einander gleich sind, so ist auch das vierte in beyden gleich.

XIX. Wenn in zwey Proportionen zwey Verhältnisse einander gleich sind, so sind es auch die beyden andern, und bilden folglich wieder eine Proportion.

XX. Der Werth einer Größe A hänge von dem Werthe zweyer andern Größen B und C (z. B. der Inhalt eines Parallelogramms von dem Werthe der Grundlinie und Höhe) dergestalt ab, daß, wenn B unverändert bleibt und C verschiedene Werthe annimmt, die Werthe von A sich immer wie die Werthe von C verhalten, und wenn C unverändert bleibt und B verschiedene Werthe annimmt, die Werthe von A sich immer wie die Werthe von B verhalten: so verhalten sich, wenn B und C zugleich verschiedene Werthe annehmen, die Werthe von A, wie die zugehörigen Werthe von B, multiplicirt mit den zugehörigen Werthen von C.

Mit andern Worten: wenn A, a zwey gleichnamige Dinge (z. B Parallelogramme) sind, und B, b, so wie C, c die gleichnamigen Werthe der Größen (z. B. der Grundlinien und Höhen) sind, von welchen sie abhängen, so daß sich

1) für B = b

$$A : a = C : c$$

und

2) für C = c

$$A : a = B : b$$

verhält; so verhält sich, wenn weder B = b, noch C = c ist,

$$A : a = B. C : b. c$$

XXI. Die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen zweyen gegebenen Zahlen wird gefunden, wenn man aus dem Producte der beyden Zahlen die Quadratwurzel zieht.

B. Elementar-Geometrie.

1. Planimetrie.

Von der geraden Linie, den Winkeln und Parallellinien.

§. 1. Eine Linie, welche überall dieselbe Richtung hat, heißt eine gerade Linie.

§. 1. b. Eine Fläche, welche so beschaffen ist, daß alle gerade Linien, die sich von jedem Punkte nach jedem andern Punkte derselben ziehen lassen, ganz in die Fläche fallen, heißt eine ebene Fläche oder Ebene.

§. 2. Zwey gerade Linien, welche beyde einerley Richtung haben, nennt man Parallellinien.

§. 3. Die Abweichung zweyer geraden Linien, welche von einem Punkte nach verschiedener Richtung ausgehen, heißt ein Winkel. Die geraden Linien heißen die Schenkel und der Punkt der Scheitelpunkt des Winkels.

§. 4. Ein Winkel ist desto größer, je weiter seine Schenkel von einander abweichen.

§. 5. Von den Schenkeln des Winkels sagt man, daß sie gegen den Scheitel hin convergiren, vom Scheitelpunkt weg aber divergiren.

§. 6. Zwey Winkel, welche einen Schenkel mit einander gemein haben, und deren beyde andere Schenkel in gerader Linie liegen, heißen Nebenwinkel.

§. 7. Sind zwey Nebenwinkel einander gleich, so heißt jeder derselben ein rechter Winkel. Von den Schenkeln des rechten Winkels sagt man: ein jeder stehe auf dem andern senkrecht oder perpendiculär.

§. 8. Sind zwey Nebenwinkel einander ungleich, so heißen sie schiefe Winkel, und zwar der größere ein stumpfer und der kleinere ein spitzer Winkel.

§. 9. Alle rechten Winkel sind unter einander gleich.

§. 10. Die Summe zweyer Nebenwinkel ist allemal = 2 Rechten.

§. 10. b. Wenn zwey Winkel, die einen Schenkel mit einander gemein haben, zusammen = 2 Rechten sind, so sind sie Nebenwinkel, und ihre beyden andern Schenkel liegen in einer geraden Linie.

§. 11. Die Summe aller Winkel, die an einander, und deren beyde äußern Schenkel in gerader Linie liegen, ist = 2 Rechten.

§. 12. Alle Winkel rings um einen Punkt herum sind zusammen = 4 Rechten.

§. 13. Wenn zwey gerade Linien einander durchschneiden, so heißen die beyden am Scheitelpunkt einander gegenüber stehenden Winkel die Scheitel- oder Verticalwinkel von einander.

§. 14. Jede zwey Scheitelwinkel sind einander gleich.

§. 15. Werden zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten, so heißen ein äußerer Winkel und der ihm an derselben Seite der schneidenden Linie gegen über liegende innere Winkel correspondirende Winkel von einander. Zwey innere Winkel, die auf beyden Seiten der schneidenden Linie und nicht neben einander liegen, heißen Wechselswinkel von einander.

§. 16. Jede zwey correspondirende Winkel sind einander gleich.

§. 17. Jede zwey Wechselswinkel sind einander gleich.

§. 18. Wenn zwey Linien parallel sind, so sind die bey-

den innern Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie zusammen = 2 Rechten.

§. 19. Zwey Linien sind parallel, wenn entweder

a) die correspondirenden Winkel einander gleich sind; oder

b) die Wechselswinkel einander gleich sind; oder

c) die beyden innern Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie zusammen = 2 R. sind.

§. 20. Wenn von zwey geraden Linien beyde derselben dritten parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.

Von den Figuren überhaupt.

§. 21. Eine von allen Seiten begränzte Ebene heißt eine Figur. Man theilt die Figuren in geradlinige, krummlinige und vermischtlinige ein. Die ganze Gränze der Figur heißt ihr Umfang oder Perimeter Dann unterscheidet man noch Seiten, Winkel, Ecken und Diagonallinien der Figur.

§. 22. Die geradlinigen Figuren theilt man nach der Zahl der Seiten in Dreyecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. Man umfaßt sie auch unter dem gemeinschaftlichen Namen von Vielecken oder Polygonen.

§. 23. Die Dreyecke theilt man:

1) in Rücksicht auf die Seiten, in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige Dreyecke, je nachdem sie drey gleiche oder nur zwey gleiche, oder lauter ungleiche Seiten haben.

2) in Rücksicht auf die Winkel, in rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige, je nachdem sie einen rechten, einen stumpfen oder lauter spitze Winkel haben.

Im rechtwinkligen Dreyeck unterscheidet man die Seiten in Hypotenuse und Katheten.

§. 24. Die Vierecke unterscheidet man in Quadraten, Rechtecke, Rhomben, Rhomboiden und Trapeze.

§. 25. Ein Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten einander parallel sind, heißt ein Parallelogramm. Sind in

einem Viereck nur zwey Seiten einander parallel, so heißt es ein Parallel-Trapez.

§. 26. Im Dreyeck und im Parallelogramm kann man eine der Seiten beliebig als Grundlinie ansehen. Dann heißt ein aus des Dreyecks Spitze oder von des Parallelogrammes gegen über liegender Seite auf die Grundlinie gefälltes Perpendikel die Höhe vom Dreyeck oder vom Parallelogramm.

§. 27. Wenn in einer Figur alle Seiten einander gleich und alle Winkel gleich groß sind, so heißt sie eine reguläre Figur; in jedem andern Falle heißt die Figur irregulär.

Bey einer regulären Figur wird der Winkel, den je zwey Seiten einschließen, der Polygonwinkel genannt.

§. 28. Die drey Winkel eines Dreyecks sind zusammen jedesmal = 2 Rechten.

§. 29. Der äußere Winkel eines Dreyecks ist = der Summe der beyden innern gegen über stehenden.

§. 30. Der äußere Winkel eines Dreyecks ist größer als ein jeder der beyden innern gegen über stehenden.

§. 31. Wenn zwey Winkel eines Dreyecks gegeben sind, so läßt sich auch der dritte finden, indem man jene beyden von 2 R. abzieht. Und sind in zweyen Dreyecken zwey Winkel gleich, so ist es auch der dritte.

§. 32. Ein Dreyeck kann nie mehr als einen rechten, und nie mehr als einen stumpfen, noch weniger einen rechten und stumpfen Winkel zugleich enthalten.

§. 33. Der Polygonwinkel des Dreyecks ist $= \frac{2}{3}$ R.

§. 34. Die 4 Winkel eines jeden Vierecks betragen zusammen 4 R. Der Polygonwinkel des Vierecks ist = 1 R. — Die fünf Winkel eines jeden Fünfecks betragen zusammen 6 R. Der Polygonwinkel des Fünfecks ist $= \frac{6}{5}$ R. u. s. w.

Von der Congruenz der Figuren.

§. 35. Figuren heißen congruent, wenn sie sich durch nichts als durch ihre Lage von einander unterscheiden.

Zwey congruente Figuren haben nicht nur gleich viele Seiten und Winkel, sondern diese sind auch, wie sie in derselben Ordnung auf einander folgen, in der einen Figur so groß als in der andern.

§. 36. Congruente Figuren haben gleiche Größe und gleiche Gestalt. Wenn man sie auf einander legt, so decken sie sich.

§. 37. Wenn von einem Dreyeck die Lage der drey Ecken gegen einander bestimmt ist, so ist das ganze Dreyeck bestimmt. Die Lage der drey Ecken ist aber unter andern bestimmt:

a) durch die drey Seiten des Dreyecks, oder

b) durch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel, oder

c) durch eine Seite und die beyden anliegenden Winkel.

In einem jeden dieser Fälle kann man die übrigen Stücke des Dreyecks nicht mehr nach Willkühr annehmen.

§. 38. Zwey Dreyecke sind congruent, wenn die drey Seiten im einen gleich sind den drey Seiten im andern.

§. 39. Zwey Dreyecke sind congruent, wenn zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel im einen gleich sind zweyen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel im andern.

§. 40. Zwey Dreyecke sind congruent, wenn eine Seite und zwey Winkel im einen gleich sind einer Seite und den gleich liegenden Winkeln im andern.

§. 41. In congruenten Dreyecken stehen den gleichen Seiten gleiche Winkel und den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegen über.

§. 42. Die Congruenz zweyer mehrseitigen Figuren läßt sich im Allgemeinen dadurch beweisen, daß man beyde durch gleich liegende Diagonallinien in Dreyecke theilt, und die Congruenz und gleichmäßige Lage der einzelnen auf einander folgenden Dreyecke darthut.

§. 43. Im gleichschenkligen Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. — Grundlinie heißt hier nämlich, der Kürze wegen, die ungleiche Seite.

§. 44. Eine Linie, aus der Spitze eines gleichschenkligen

Dreyecks nach der Mitte der Grundlinie gezogen, steht senkrecht auf derselben.

§. 45. Diese Linie halbirt auch den Winkel an der Spitze.

§. 46. Das Perpendikel aus der Spitze des gleichschenkligen Dreyecks auf die Grundlinie halbirt dieselbe, so wie auch den Winkel an der Spitze.

§. 47. Jeder Punkt auf dem Perpendikel, der durch die Mitte einer geraden Linie geht, ist von den beyden Endpunkten der geraden Linie gleich weit entfernt.

§. 48. Wenn man durch die Spitzen zweyer gleichschenkligen Dreyecke, die auf derselben Grundlinie stehen, eine gerade Linie zieht, so geht diese senkrecht durch die Mitte der Grundlinie.

§. 49. Ein Dreyeck, in welchem zwey Winkel einander gleich sind, ist gleichschenklig.

§. 50. Die Winkel des gleichseitigen Dreyecks sind alle einander gleich, und umgekehrt: ein Dreyeck, das gleiche Winkel hat, ist gleichseitig.

§. 51. Der größern Seite im Dreyeck steht jedesmal auch ein größerer Winkel gegen über und umgekehrt dem größern Winkel eine größere Seite.

§. 52. Unter allen geraden Linien, die von einem gegebenen Punkt nach einer gegebenen geraden Linie gezogen werden können, ist das Perpendikel die kleinste.

§. 53. Zwey Seiten eines Dreyecks sind zusammen immer größer als die dritte.

§. 54. Wenn in zweyen Dreyecken zwey Seiten gleich, der eingeschlossene Winkel aber in dem einen Dreyeck größer als in dem andern ist, so ist auch die dritte Seite in jenem Dreyeck größer als in diesem. Und umgekehrt, wenn die dritte Seite größer ist, so ist auch jener Winkel größer.

§. 55. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwey congruente Dreyecke getheilt.

§. 56. Im Parallelogramm sind die gegen über liegenden Seiten gleich groß.

§. 57. Im Parallelogramm sind die gegen über liegenden Winkel einander gleich.

§. 58. Durch zwey an einander liegende Seiten und einen Winkel ist das ganze Parallelogramm bestimmt.

§. 59. Wenn in einem Viereck zwey Seiten gleich und parallel sind, so ist es ein Parallelogramm.

§. 60. Jedes Viereck, dessen gegen über liegende Seiten gleich groß sind, ist ein Parallelogramm.

§. 61. Alle Perpendikel zwischen denselben Parallellinien sind gleich groß. — Das Perpendikel zwischen zweyen Parallellinien mißt den Abstand beyder von einander. — Zwey Parallellinien stehen überall gleich weit von einander ab, und treffen, so weit man sie auch verlängern mag, nicht zusammen. Umgekehrt: wenn zwey Linien nirgends zusammen treffen, so sind sie parallel.

§. 62. Aufgaben:

a) Einen gegebenen Winkel an einen gegebenen Punkt einer geraden Linie zu tragen.

b) Durch einen Punkt außerhalb einer geraden Linie eine Parallellinie zu ziehen.

c) Aus drey gegebenen Seiten ein Dreyeck zu verfertigen;

d) aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel;

e) aus einer Seite und zwey anliegenden Winkeln.

f) In einem gegebenen Punkt einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten.

g) Von einem gegebenen Punkt außerhalb einer geraden Linie ein Perpendikel auf dieselbe zu fällen.

h) Eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.

i) Einen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen.

Von der Gleichheit der Figuren in Rücksicht auf Flächeninhalt.

§. 63. Zwey Figuren heißen einander gleich, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben, ohne Rücksicht auf ihre Gestalt.

§. 64. Parallelogramme auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallellinien sind gleich groß.

§. 65. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.

§. 66. Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

§. 67. Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

§. 68. Parallelogramme von ungleicher Höhe und ungleicher Grundlinie verhalten sich wie die Producte aus der Höhe in die Grundlinie.

§. 69. Dreyecke von einerley Grundlinie und einerley Höhe sind gleich groß.

§. 70. Dreyecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

§. 71. Dreyecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

§. 72. Dreyecke von ungleicher Höhe und ungleicher Grundlinie verhalten sich wie die Producte aus der Höhe in die Grundlinie.

§. 73. Messen heißt: eine Größe mit einer andern, die als bekannt angenommen wird, vergleichen, indem man bestimmt, wie vielmal diese in jener enthalten sey. Die gemessene Größe und ihr Maßstab müssen gleichartige Dinge seyn. Flächen werden wieder nur durch Flächen gemessen. Als Maßstab der Flächen bedient man sich gewöhnlich des Quadrats.

§. 74. Die Grundlinie irgend eines Parallelogramms enthalte die Seite eines Quadrats, das zum Maßstab angenommen wird, g mal, und die Höhe des Parallelogramms enthalte die Seite des Quadrats h mal; so verhält sich das Parallelogramm zu dem Quadrat $=$ h. g : 1, d. h. das Parallelogramm enthält h. g solcher Quadrate.

§. 75. Ein Parallelogramm auszumessen, messe man Grundlinie und Höhe mit der Seite desjenigen Quadrats, das man als Maß-Einheit annimmt, und multiplicire die erhaltenen

Zahlen mit einander. Das Product gibt das Verhältniß des Parallelogramms zum Quadrate.

Kürzer ausgedrückt: man multiplicire die Grundlinie mit der Höhe.

§. 76. Quadrate verhalten sich wie die Quadratzahlen ihrer Seiten.

§. 77. Ein Dreyeck auszumessen, multiplicire man Grundlinie und Höhe, und dividire das Product durch 2.

§. 78. Eine jede andere geradlinige Figur auszumessen, zerlege man die Figur in Dreyecke, bestimme den Inhalt eines jeden nach §. 77, und addire den Inhalt aller Dreyecke zusammen.

§. 79. Das Quadrat der Hypotenuse ist so groß als die Quadrate der beyden Katheten zusammen genommen.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 80. Figuren heißen einander ähnlich, wenn sie die gleiche Gestalt haben, ohne Rücksicht auf ihre Größe.

§. 81. Zwey ähnliche Figuren haben gleich viele Seiten und Winkel. Die Winkel der einen Figur sind so groß, als die der andern, und folgen in beyden Figuren in der gleichen Ordnung auf einander. Die gleich liegenden [gleichnamigen] Seiten haben unter einander das gleiche Verhältniß in der einen Figur, wie in der andern; oder sind proportionirt.

§. 82. Die Gestalt eines Dreyecks wird schon durch einige Stücke bestimmt, so daß, wenn diese gegeben sind, die übrigen nicht mehr nach Willkühr angenommen werden können.

§. 83. Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn in beyden die Seiten proportionirt sind.

§. 84. Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn zwey Seiten in dem einen zweyen Seiten in dem andern proportionirt sind, und der eingeschlossene Winkel in beyden gleich ist.

§. 85. Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn die Winkel in beyden gleich sind.

§. 86. In ähnlichen Dreyecken stehen den gleichnamigen Seiten gleiche Winkel, und den gleichen Winkeln gleichnamige Seiten gegenüber.

§. 87. Die Aehnlichkeit zweyer mehrseitigen Figuren läßt sich im Allgemeinen dadurch beweisen, daß man beyde durch gleichnamige Diagonalen in Dreyecke theilt, und die Aehnlichkeit und gleichmäßige Lage der einzelnen auf einander folgenden Dreyecke darthut.

§. 88. Wenn man in einem Dreyeck eine Linie parallel mit einer Seite [der Grundlinie] zieht, so ist das abgeschnittene Dreyeck dem ganzen ähnlich.

§. 89. Wenn man in einem Dreyeck eine Linie parallel mit der Grundlinie zieht, so verhalten sich die ganzen Seiten wie die Stücke oberhalb der parallelen Linie.

§. 90. Wenn man in einem Dreyeck eine Linie parallel mit der Grundlinie zieht, so verhalten sich die Stücke oberhalb wie die Stücke unterhalb der parallelen Linie.

§. 91. Wenn man in einem Dreyeck eine Linie parallel mit der Grundlinie zieht, so verhält sich die ganze Seite zum Stück oberhalb der parallelen Linie, wie die Grundlinie zur parallelen Linie.

§. 92. Wenn durch ein Dreyeck eine Linie so gezogen ist, daß sich die ganzen Seiten wie die Stücke oberhalb, oder die Stücke oberhalb wie die Stücke unterhalb derselben verhalten; so ist diese Linie der Grundlinie parallel.

§. 93. Aehnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

§. 94. Aehnliche Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

§. 95. Ueberhaupt verhalten sich ähnliche Figuren wie die Quadrate gleichnamiger Linien in ihnen.

§. 96. Aufgaben:

a) Zu drey gegebenen Linien die vierte geometrische Proportionallinie zu finden.

b) Eine gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

c) Eine gerade Linie so zu theilen, daß sich die Theile wie gegebene Linien verhalten.

Vom Kreise.

§. 97. Eine Figur, in der jeder Punkt des Umfangs von einem gewissen innern Punkte gleich weit absteht, heißt ein Kreis. Jener Punkt heißt der Mittelpunkt. Den Umfang nennt man hier insbesondere den Umkreis oder Peripherie. Eine gerade Linie aus dem Mittelpunkte nach dem Umfang heißt ein Halbmesser oder Radius.

§. 98. Ein Theil des Umkreises heißt ein Bogen, der vierte Theil des Umkreises insbesondere ein Quadrant. Eine gerade Linie von einem Punkt des Umkreises nach einem andern heißt eine Sehne oder Chorde; eine Sehne, die durch den Mittelpunkt geht, ein Durchmesser.

§. 99. Ein Stück des Kreises, das von zweyen Halbmessern und einem Bogen begränzt wird, heißt ein Kreisausschnitt oder Sector; ein Stück, das von einer Sehne und einem Bogen begränzt wird, ein Kreisabschnitt oder Segment.

§. 100. Zwey oder mehrere Kreise, welche denselben Mittelpunkt haben, heißen concentrische Kreise.

§. 101. Alle Halbmesser desselben Kreises sind einander gleich. Eben so auch alle Durchmesser.

§. 102. Ein Perpendikel aus eines Kreises Mittelpunkt auf eine Sehne halbirt dieselbe.

§. 103. Eine gerade Linie, aus dem Mittelpunkt eines Kreises auf die Mitte der Sehne gezogen, steht senkrecht auf ihr.

§. 104. Ein Perpendikel, durch die Mitte zweyer Sehnen gezogen, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

§. 105. Zwey Perpendikel, durch die Mitte zweyer Sehnen gezogen, treffen im Mittelpunkt des Kreises zusammen.

§. 106. Drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, liegen jedesmal in der Peripherie desselben Kreises.

§. 107. Durch drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, läßt sich jedesmal ein Kreis beschreiben. — Durch die Lage dreyer Punkte ist der Kreis bestimmt, der sich durch dieselben beschreiben läßt.

§. 108. Gleichen Bögen eines Kreises liegen gleiche Winkel am Mittelpunkte gegen über; und umgekehrt gehören zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte auch gleiche Bögen.

§. 109. Im Kreise verhalten sich die Winkel am Mittelpunkte wie die ihnen gegen über stehenden Bögen.

§. 110. Zu gleichen Winkeln am Mittelpunkt verschiedener Kreise gehören ähnliche Bögen, d. h. solche, die zu der Peripherie ihres Kreises einerley Verhältniß haben.

§. 111. Der Winkel am Mittelpunkt ist noch einmal so groß, als der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

§. 112. Peripheriewinkel, die auf gleichen Bögen stehen, sind einander gleich, und umgekehrt: gleiche Peripheriewinkel fassen gleiche Bögen zwischen ihre Schenkel.

§. 113. Ein Winkel an der Peripherie hat die Hälfte des Bogens, auf welchem er steht, zu seinem Maße.

§. 114. Ein Peripheriewinkel, der auf den Endpunkten des Durchmessers steht, ist = 1 R.

§. 115. In jedem Viereck, dessen Ecken in der Peripherie desselben Kreises liegen, machen zwey gegen über stehende Winkel zusammen zwey Rechte.

§. 115. b. Die Ecken eines jeden Vierecks, in dem zwey gegen über stehende Winkel zusammen zwey Rechte ausmachen, liegen in der Peripherie desselben Kreises.

§. 116. Das Perpendikel aus einem Punkte der Peripherie auf den Durchmesser ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Abschnitten des Durchmessers.

§. 117. Wenn man aus dem einen Endpunkte einer Sehne ein Perpendikel auf den durch den andern Endpunkt

der Sehne gehenden Durchmesser fällt; so ist die Sehne die mittlere Proportionallinie zwischen dem Durchmesser und dem, zwischen der Sehne und dem Perpendikel enthaltenen, Abschnitte desselben.

§. 118. Ein Perpendikel, auf das Ende eines Halbmessers errichtet, hat mit dem Kreise keinen Punkt weiter gemein, und liegt ganz außerhalb desselben.

§. 119. Eine gerade Linie, welche mit dem Kreise nur einen einzigen Punkt gemein hat, und ganz außerhalb desselben liegt, heißt eine Tangente des Kreises.

§. 120. Ein Halbmesser, an den Berührungspunkt einer Tangente gezogen, macht mit ihr einen rechten Winkel.

§. 121. Von jedem Punkt außerhalb eines Kreises lassen sich jedesmal zwey Tangenten an den Kreis ziehen.

Die gerade Linie nach dem Mittelpunkt des Kreises halbirt den Winkel, welchen beyde Tangenten mit einander machen.

§. 122. Wenn die Mittelpunkte zweyer Kreise um die Summe ihrer Halbmesser von einander abstehen, so berühren die beyden Kreise einander von außen.

§. 123 Wenn die Mittelpunkte zweyer ungleichen Kreise um die Differenz ihrer Halbmesser von einander abstehen, so berührt der kleinere Kreis den größeren von innen.

§. 124. Wenn von einem Punkt außerhalb eines Kreises zwey gerade Linien durch den Kreis bis an den gegen über stehenden Theil der Peripherie gezogen werden; so verhalten sie sich umgekehrt wie ihre äußeren Abschnitte.

§. 125. Wenn von einem Punkt außerhalb eines Kreises zwey gerade Linien gezogen werden, von welchen die eine den Kreis berührt, und die andere ihn schneidet; so ist die Tangente die mittlere Proportionallinie zwischen der schneidenden Linie und ihrem äußeren Abschnitte.

§. 125. b. Wenn von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine gerade Linie an den Kreis und eine zweyte durch den Kreis bis an den gegen über stehenden Theil der Peripherie geht, und die erste die mittlere Proportionallinie zwischen der

zweyten und deren äußerem Abschnitte ist; so ist die erste an dem Kreise tangent.

§. 126. Wenn zwey Sehnen einander schneiden, so verhält sich der eine Abschnitt der ersten zum einen Abschnitt der zweyten Sehne, wie der andere Abschnitt dieser zweyten zum andern Abschnitt der ersten Sehne.

§. 127. Eine Figur heißt in dem Kreis beschrieben, wenn alle Ecken derselben in die Peripherie desselben Kreises fallen, um den Kreis beschrieben aber, wenn alle ihre Seiten an der Peripherie desselben Kreises tangent sind. In jenem Falle heißt der Kreis um, in diesem in der Figur beschrieben.

§. 128. Die Ecken eines jeden regulären Vielecks liegen in der Peripherie desselben Kreises.

§. 129. Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises läßt sich gewissermaßen als der Mittelpunkt des regulären Vielecks betrachten. Zieht man aus diesem Mittelpunkt die Halbmesser nach den Ecken des Vielecks, so zerfällt das Vieleck dadurch in eben so viele congruente Dreyecke, als es Seiten hat; und der Winkel am Mittelpunkt ist jedesmal $= \frac{4\,R.}{n}$, wenn n die Anzahl der Seiten des Vielecks bedeutet.

§. 130. Die Seite eines regulären Vielecks sey $= s$, das Perpendikel aus dem Mittelpunkt auf die Seite $= h$; so ist der Inhalt eines Vielecks von n Seiten $= \frac{1}{2}$ h. ns, d. h. = dem Product aus dem Umfange in die halbe Höhe des Dreyecks nach dem Mittelpunkte.

§. 131. Die Seite eines um den Kreis beschriebenen regulären Vielecks verhält sich zur Seite des ähnlichen Vielecks, das in dem Kreis beschrieben ist, wie der Halbmesser des Kreises zu dem Perpendikel aus dem Mittelpunkt auf die Seite des inneren Vielecks.

§. 132. Die Seite des regulären Sechsecks ist dem Halbmesser des umschriebenen Kreises gleich.

§. 133. Aus der Seite des im Kreis beschriebenen regulären Sechsecks läßt sich die Seite des regulären Zwölfecks, aus dieser die Seite des Vierundzwanzigecks u. s. w. berechnen.

§. 134. Aus den Seiten des im Kreise beschriebenen regulären Sechsecks, Zwölfecks, Vierundzwanzigecks, Achtundvierzigecks u. s. w. lassen sich die Seiten der um den Kreis beschriebenen nach §. 131. finden. Je weiter man diese Rechnung fortsetzt, desto kleiner findet man die Differenz zwischen dem Umfang des um uud des in dem Kreise beschriebenen Vielecks, desto mehr nähert man sich also dem wahren Umfang des Kreises. — Man findet das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser $= 3, 14 : 1$.

§. 135. Bezeichnet man die Verhältnißzahl der Peripherie zum Durchmesser mit π, den Halbmesser mit r, den Durchmesser mit d, die Peripherie mit p und den Flächeninhalt mit a, so hat man folgende Sätze:

I) $p = \pi . d$ oder $p = 2 \pi r$

II) $d = \frac{p}{\pi}$ oder $r = \frac{p}{2 \pi}$

III) $a = \pi r^2$ oder $a = \frac{1}{4} \pi d^2$

IV) $r = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ oder $d = \frac{a}{\frac{1}{4} \pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi}}$

§. 136. Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser.

§. 137. Aufgaben:

a) Durch drey gegebene Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu ziehen.

b) Zu zwey gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden.

c) Mit Hülfe des Kreises und des Transporteurs ein reguläres Vieleck von n Seiten zu beschreiben.

d) Die Länge eines Bogens von n Graden zu finden, wenn der Halbmesser gegeben ist, und ähnliche Aufgaben.

2. Stereometrie.

Lage der Ebenen gegen Punkte, Linien und Ebenen.

§. 138. Eine gerade Linie liegt jedesmal in derselben Ebene. — Es gibt aber unzählig viele Ebenen, in welchen eine gegebene gerade Linie liegen kann.

§. 139. Drey Punkte liegen jedesmal in derselben Ebene.

§. 140. Zwey Linien, die einander schneiden, liegen in derselben Ebene.

§. 141. Drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene.

§. 142. Eine gerade Linie, welche auf zweyen Linien einer Ebene, die sich schneiden, zugleich senkrecht steht, steht auf allen andern Linien senkrecht, welche sich von jenem Durchschnittspunkt aus auf der Ebene ziehen lassen.

§ 143. Von einer geraden Linie, welche auf allen Linien, die sich von ihrem Durchschnittspunkt aus auf der Ebene ziehen lassen, senkrecht steht, sagt man: sie stehe auf der Ebene senkrecht. — Also steht eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht, sobald sie nur auf zweyen Linien in der Ebene zugleich senkrecht steht.

§. 144. Zwey in verschiedenen Ebenen liegende Winkel, welche von parallelen Linien gebildet werden, sind einander gleich.

§. 145. und 146. Zwey Ebenen, welche überall gleich weit von einander abstehen, heißen parallele Ebenen. — Parallele Ebenen treffen, so weit man sie verlängern mag, nicht zusammen.

§. 147. Wenn zwey parallele Ebenen von einer dritten Ebene durchschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien parallel.

§. 148. Ebenen, die nicht parallel sind, werden, gehörig verlängert, sich in einer geraden Linie schneiden. Der Winkel, den das Perpendikel, das man in der einen Ebene auf die Durchschnittslinie zieht, mit dem Perpendikel macht, das man

in der andern Ebene in demselben Punkt der Durchschnitts-linie errichtet, heißt der Neigungswinkel beyder Ebenen.

§. 149. Ist der Neigungswinkel ein rechter, so stehen die Ebenen senkrecht auf einander.

§. 150. Steht eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht, so sind alle durch die Linie gelegten Ebenen auf jener Ebene senkrecht.

§. 151. Steht eine Ebene auf einer andern Ebene senkrecht, so steht auch das Perpendikel, das man in der einen Ebene auf die Durchschnittslinie fällt, auf der ganzen andern Ebene senkrecht.

§. 152. Wenn zwey Ebenen, die sich schneiden, auf einer dritten Ebene zugleich senkrecht stehen, so steht ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht.

Von den körperlichen Winkeln.

§. 153. Wenn mehr als zwey gerade Linien, von welchen immer nur zwey in derselben Ebene liegen, in Einem Punkt zusammen treffen, so bilden sie einen körperlichen Winkel oder Ecke.

Der körperliche Winkel wird von eben so viel ebenen Winkeln eingeschlossen, als der geraden Linien sind.

§. 154. Wenn ein körperlicher Winkel aus drey ebenen besteht, so sind je zwey zusammen größer als der dritte.

§. 155. Die Summe aller ebenen Winkel, die einen körperlichen bilden, ist jedesmal kleiner als 4 R.

Von den regulären Körpern.

§. 156. Reguläre Körper heißen solche, die von lauter congruenten regulären Figuren eingeschlossen werden, welche an den Ecken lauter gleiche körperliche Winkel bilden.

§. 157. Es gibt fünf Arten regulärer Körper:

a) das Tetraëder, das von vier Dreyecken,

b) der Würfel oder das Hexaëder, das von 6 Quadraten,

c) das Octaëder, das von 8 Dreyecken,

d) das Dodecaëder, das von 12 Fünfecken,

e) das Icosaëder, das von 20 Dreyecken

begränzt wird.

Von den prismatischen Körpern oder Prismen.

§. 158. Prisma heißt ein Körper, der zwey congruente und parallele Figuren zu Grundflächen, und eben so viele Parallelogramme zu Seitenflächen hat, als die Grundflächen Seiten haben.

Sind die Grundflächen ebenfalls Parallelogramme, so heißt das Prisma ein Parallelepipedum.

Man theilt die Prismen in gerade und schiefe, und nennt sie nach der Seitenzahl der Grundflächen, dreyseitige, vierseitige, fünfseitige u. s. w.

§. 159. Prismatische Körper sind überall gleich dick, d. h. wo man sie mit den Grundflächen parallel durchschneidet, ist die Durchschnittsfläche mit den Grundflächen congruent, also auch gleich groß.

§. 160. Bei einem prismatischen Körper verhalten sich die durch parallele Schnitte abgeschnittenen Stücke wie die zugehörigen Seitenflächen.

§. 161. Jede zwey gegen über liegende Seitenflächen eines Parallelepipedums lassen sich als Grundflächen dieses prismatischen Körpers ansehen.

§. 162. Jedes Parallelepipedum läßt sich durch einen Diagonalschnitt in zwey congruente dreyseitige Prismen zerlegen.

§. 163. Parallelepipeden von gleicher Höhe über derselben Grundfläche haben gleichen Inhalt.

§. 164. und 165. Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleich großer Grundfläche haben gleichen Inhalt.

§. 166. Prismen von gleicher Höhe und gleich großer Grundfläche haben gleichen Inhalt.

§. 167. Prismen verhalten sich bei einerley Grundfläche wie ihre Höhen und bey einerley Höhe wie ihre Grundflächen.

Von der Kugel.

§. 186. Ein Körper, in welchem jeder Punkt der Oberfläche von einem gewissen innern Punkte gleich weit absteht, heißt eine **Kugel**. Die Wörter **Mittelpunkt**, **Halbmesser**, **Durchmesser**, **Kugelsector** und **Kugelsegment** haben eine ähnliche Bedeutung wie beym Kreis. Ein Stück der Kugeloberfläche, das zwischen zweyen parallel durch die Kugel geführten Schnitten enthalten ist, heißt eine **Kugelzone**.

§. 187. Alle Halbmesser derselben Kugel sind einander gleich.

§. 188. Wenn man eine Kugel durch eine Ebene durchschneidet, so ist der Durchschnitt jedesmal ein Kreis.

§. 189. Der Schnitt durch die Kugel wird ein desto größerer Kreis, je näher er beym Mittelpunkte vorbey geht.

§. 190. Der Schnitt wird am größten, wenn er durch den Mittelpunkt selbst geführt wird. Er hat dann mit der Kugel gleichen Halbmesser. Alle Schnitte durch den Mittelpunkt der Kugel sind einander gleich, und heißen **größte Kreise der Kugel**.

§. 191. Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, der mit der Kugel gleichen Durchmesser und eine dem Durchmesser gleiche Höhe hat.

§. 192. Bezeichnet man den Halbmesser der Kugel mit r, so ist der cubische Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3} \pi r^3$.

§. 193. Die Oberfläche der Kugel ist $= 4 \pi r^2$.

§. 194. Die Oberfläche der Kugel ist 4 mal so groß als der größte Kreis derselben.

§. 195. Kugeln verhalten sich wie die Cubiczahlen ihrer Halbmesser.

Einleitung

in die

Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze.

Was ich als Einleitung in die Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze zu sagen habe, zerfällt in zwey Abschnitte, von welchen sich der eine über den Gegenstand der Sammlung, vorzüglich über den Begriff und die Form einer geometrischen Aufgabe und eines geometrischen Lehrsatzes, umständlicher verbreitet, und der andere den Gebrauch der Sammlung, als Material für den Unterricht, angibt. Der erste dieser beyden Abschnitte könnte überflüssig scheinen, weil erstens der Gegenstand des Buchs durch seinen Titel als hinreichend ausgedrückt, und namentlich der Begriff von Aufgabe und Lehrsatz als allzubekannt angesehen werden dürfte; und weil zweytens dem Mathematiker die Feststellung dieser beyden Begriffe sehr gleichgiltig *) und für

---

*) Lambert drückt sich in seinem neuen Organon (Leipzig 1764) Th. I. S. 97. über die Unwichtigkeit der Unterscheidung und Benennung der mathematischen Sätze also aus: „Die Mathematiker pflegen diese Sätze mit ihrem Namen zu benennen, damit sich der Leser gleich darein finden könne. So z. E. wenn sie einen Satz ohne Beweis vortragen, weil er an sich von einleuchtender Wahrheit ist, so nennen sie ihn einen Grundsatz. Diese Ueberschrift zeigt nicht nur an, für was man den Satz ausgibt, sondern sie erinnert auch den Leser, ob er den Satz an sich betrachtet, und ohne ferneren Beweis einräumen könne. Eben so, wenn der Satz eine Erklärung ist, — so wird das Wort Erklärung zur Ueberschrift genommen, wiederum, um dem Leser anzuzeigen, was er in Ansehung des Satzes zu bemerken habe. Auf gleiche Art werden auch die Wörter Lehrsatz, Erfahrung, Versuch, als Ueberschriften der Sätze gebraucht. Da sie nur anzeigen, was die Sätze seyn sollen, so

seine Wissenschaft ganz unfruchtbar ist. Allein, wenn auch der Mathematiker, als solcher, über die Form seines wissenschaftlichen Vortrags füglich hinweg sehen kann (denn die Form macht doch wohl das Wesen der Wissenschaft und Wissenschaftlichkeit nicht aus); so ist diese doch eine Sache, die den Lehrer der Mathematik angeht, und die, so bekannt im Allgemeinen die Abtheilung der mathematischen Sätze auch seyn mag, doch noch einer näheren Betrachtung werth ist.

Einen dritten Abschnitt der Einleitung könnte die Angabe und nähere Bezeichnung der Schriften ausmachen, welche ich zu meiner Sammlung benutzt habe. Allein, da im Verlauf der Arbeit zu den bereits benutzten wohl noch einige hinzukommen werden, so werde ich das ausführliche Verzeichniß derselben an das Ende der ganzen Sammlung verschieben.

I. Ueber geometrische Aufgaben und Lehrsätze überhaupt.

Als unübertroffenes Muster geometrischer Darstellung gelten noch immer die Elemente des Euklides. Daß in dem schriftlichen Vortrage der Geometrie nur ein Gang der richtige und nothwendige sey, läßt sich keineswegs behaupten. Diejenigen, welche sagen, daß eine jede Abweichung von der Euklidischen Methode ein Abweg von dem richtigen Gange sey, sprechen ein unbewiesenes Urtheil aus. Hingegen läßt sich nicht läugnen, daß die eine schriftliche Darstellung vor der

---

erinnern sie den Leser, zu untersuchen, ob sie es wirklich sind, weil die bloße Ueberschrift die Sache nicht ausmacht, und sich folglich niemand durch den Schein der Genauigkeit darf blenden lassen, die diese Ueberschriften in den mathematischen Schriften anzeigen. Man kann daher die Genauigkeit auch ohne diese Ueberschriften beobachten, weil diese gar keinen Antheil daran haben, und bloße Unterscheidungszeichen der Sätze sind.“

andern große Vorzüge habe, sowohl in rein wissenschaftlicher Hinsicht, indem sich bey der einen nicht so leicht Trugschlüsse einschleichen, als bey der andern, als auch in didactischer Hinsicht, indem die geometrischen Wahrheiten bey der einen leichteren Zugang zu dem Verstande des Lesers finden, als bey der andern, und der Verstand des Lesers selbst bey der einen mehr gebildet wird, als bey der andern. Bewunderungswürdig sind hierin die Leistungen Euklids. Daher werde ich mich auch, um den Begriff von Lehrsatz und Aufgabe festzustellen, und die richtige Form von beyden anzugeben, meist an Euklides halten. Freylich wissen wir nicht mit Bestimmtheit, wie weit wir die Elemente, wie sie von Euklides niedergeschrieben worden sind, unverändert überliefert bekommen haben. Namentlich sind Viele der Meinung, daß wir die Anordnung der Sätze, oder gar ihre Beweise, dem Theon von Alexandria, der im vierten Jahrhundert nach Chr. G. lebte, zu verdanken hätten. Etwas der Art spricht unter andern der Titel der Griechischen Ausgabe aus, Ευκλειδου Στοιχειων βιβλ. ιέ. ἐκ των Θεωνος συνουσιων. Basileae apud Joan. Hervagium Anno MDXXXIII. Daß die Arbeit des Theon an den Elementen des Euklides wahrscheinlicher Weise nicht so bedeutend war, darüber kann man die von Savilius zusammen gestellten Gründe in Hauberi Chrestomathia Geometrica Tübingen 1820, S. 7—9, *) nachlesen. Auch wird das, was ich über Euklid als Lehrer sagen werde, uns nicht wenig bestimmen, alle Vollkommenheiten, welche das Gebäude seiner Geometrie von innen und außen besitzt, ihm selbst zuzuschreiben. Wie dem aber auch sey, so wird das Innere und Aeußere des Werkes, wie es in der eben erwähnten Baseler Ausgabe vor mir liegt, mir zur Grundlage dienen, wenn ich die eine oder andere Bemerkung über die Euklidische Methode mache.

---

*) Diese vortreffliche Chrestomathie wäre, um in den oberen Classen von Gymnasien, als Vorschule zur Logik, gelesen zu werden, sehr zu empfehlen.

Euklid als Lehrer.

Ueber Euklids Lebensumstände wissen wir sehr wenig *). Er war ein Grieche, machte seine Studien wahrscheinlich zu Athen unter den Nachfolgern des Plato, und lehrte (300 Jahre vor Chr.) mit dem segensreichsten Erfolge die Mathematik zu Alexandria, wohin er wahrscheinlich bey oder nicht lange nach der Gründung der berühmten, und namentlich für die Erweiterung und Verbreitung der Mathematik so wichtig gewordenen, Schule durch die Ptolemäer einen Ruf erhielt.

Es kann nicht oft genug erinnert werden, daß unser Euklid mit des Socrates Schüler aus Megara nicht verwechselt werden darf, da für Unkundige die Veranlassung zu dieser Verwechselung so leicht ist, indem er auf den Titeln mehrerer Lateinischen Ausgaben seiner Elemente Euclides Megarensis genannt wird. Wo in Griechenland der Mathematiker Euklid geboren ist, wissen wir nicht. „Daß er aus Megara war, sagt Savilius **) sehr richtig, kann daraus, daß der Schüler des Socrates aus Megara war, eben so wenig geschlossen werden, als daß er aus Athen war, weil es zwey Archonten seines Namens zu Athen gegeben hat."

Was die verschiedenen, theils erhaltenen, theils verlorenen, Schriften des Euklid, und die Aechtheit oder Unächtheit derselben betrifft, so liegt es außer meinem Zwecke, sie hier auf-

*) Montucla hist. des Mathem. I. p. 217.

**) Hauber l. c. p. 6. — „Henricus Savilius, ein edler Engländer, geb. 1549, gest. 1622, stiftete zu Oxford zwey Lehrämter der Geometrie, und der Astronomie. Ehe der Lehrer der Geometrie auftrat, hielt Savile selbst Vorlesungen. Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis Oxoniae habitae MDCXX., Ox. 1621." S. Kästner's Gesch. der Mathem. III. S. 19. Kästner sagt, daß dieses Werk sehr selten sey. Um so willkommener werden dem Lehrer der Mathematik die Bruchstücke seyn, welche Hauber in seiner Chrestomathie aufgenommen hat, zumal da sich das Latein des Savilius sehr angenehm liest.

zuzählen. Nur zweyer verloren gegangenen Werke, die den Verfasser, außer seinem Hauptwerke, den Elementen, vorzüglich auch als Lehrer der Mathematik charakterisiren, will ich hier erwähnen. Diese sind nämlich seine Porismen und seine Pseudarien. Ueber die Porismen kann ich mich erst weiter unten ausführlicher verbreiten. Der Pseudarien erwähnt Proklus, das Haupt der Platonischen Schule zu Athen *), der in der Mitte des fünften Jahrhunderts nach Chr. lebte, im zweyten Buche seiner Commentarien zu dem ersten Buche der Euklidischen Elemente. Proklus schreibt **) darüber also: „Da uns aber vieles als unwiderleglich wahr und als aus den Prinzipien der Wissenschaft richtig gefolgert erscheint, was vielmehr auf Abwege von den Prinzipien hinneigt und die Unvorsichtigeren irre führt; so gab Euklid auch Vorschriften, wie der Verstand diesen Schein zu durchschauen habe. Im Besitz dieser Vorschriften werden wir die Anfänger dieser Wissenschaft im Auffinden der Trugschlüsse üben, und sie geschickt machen können, von Täuschung frey zu bleiben. Und dieses Werk, durch welches er uns diese Vorübung verschafft, überschrieb er Täuschungen (Ψευδαρίων); denn er zählte darin die mancherley Arten derselben der Reihe nach her, und übte bey einer jeden unsere Urtheilskraft durch mancherley Lehrsätze, indem er der Unwahrheit die Wahrheit entgegen stellte, und der Täuschung die Aufdeckung der Trugschlüsse hinzu fügte. Dieses Buch ist also zur Schärfung und Uebung des Verstandes bestimmt; die Elemente hingegen enthalten einen

---

*) Moutucla l. c. I. S. 327.

**) Hauber l. c. p. 5. — In der oben (S. 29.) erwähnten Griechischen Ausgabe der Elemente des Euklid, in welcher der Euklid selbst 268 Folioseiten einnimmt, folgen unmittelbar nach dem Euklid die Griechischen Commentare des Proklus, in vier Bücher abgetheilt, welche sämmtlich zum ersten Buche der Elemente gehören. Sie zählen von S. 1 bis 115. Daselbst befindet sich die oben im Texte erwähnte Stelle S. 20.

unwiderleglichen und lückenlosen Unterricht in der wissenschaftlichen Betrachtung der Lehren der Geometrie."

Die Pseudarien hatten also eine rein didactische (man könnte sagen: pädagogische) Tendenz. Das Buch sollte nicht die Gränzen der Mathematik erweitern; sondern es sollte unsern Verstand auf ein gründliches Studium der Mathematik vorbereiten. Und ich wage kaum zu viel, wenn ich behaupte: es sollte nicht blos das gründliche Studium der Mathematik befördern, sondern es sollte den Verstand überhaupt durch das gründliche Studium der Mathematik üben und schärfen, und dadurch zu dem Studium der Philosophie geschickt machen. Daß Plato (370 vor Chr.) diese Ansicht von der Mathematik hatte, ist bekannt *) „Mathematik, vorzüglich Geometrie, bildete die Grundlage seines Unterrichtes. Er ließ, sagt man, keinen Tag vorbey gehen, ohne seinen Schülern irgend eine neue Wahrheit zu zeigen. Jedermann kennt die berühmte Aufschrift, durch welche er den Unkundigen der Geometrie den Eintritt in sein Lehrzimmer verboth." Gesetzt nun auch, Euklid habe nicht wirklich zu Athen den mündlichen Unterricht der Nachfolger Plato's genossen, so bekannte er sich doch zur Platonischen Schule. Die (pädagogische) Ansicht, die Mathematik weniger um ihrer selbst willen zu lehren, als sie vielmehr als das vorzüglichste Bildungsmittel des Verstandes zu betrachten, konnte ihm nicht fremd seyn. Die Platonische Schule zu Athen zählte in dem kurzen Zeitraume von nicht viel mehr als einem halben Jahrhundert, von ihrer Stiftung bis zur Lehrerthätigkeit Euklids, sehr viele ausgezeichnete Lehrer der Mathematik und Verfasser von Lehrbüchern. **) Diese

*) Montucla I. S. 171.

**) Hierher gehört folgende Stelle aus Proklus: „Unter allen denen, welche erwähnt worden, hat zuerst Hippokrates aus Chios Elemente der Geometrie geschrieben. Nach ihm veranlaßte Platon eine große Erweiterung nicht nur der Geometrie, sondern auch der übrigen Mathematik, durch seinen Eifer für

waren die Quellen, aus welchen Euklid die Materia-
lien zu seinen Elementen schöpfte. Sollte damit nicht auch

---

dieselbe. Denn es ist bekannt, daß er sowohl seine Schriften mit mathematischen Reden füllte, als auch überall aufregte, was in der Mathematik bewundernswürdig war, und auf die Philosophie Bezug hatte. Zu derselben Zeit waren auch Leodamas von Thasus, Archytas von Tarent und Theätetus von Athen; durch diese wurden die Lehrsätze vermehrt und gelangten zu einer wissenschaftlichen Zusammenstellung. Jünger als Leodamas ist Neoklides und dessen Schüler Leon, welche zu den Erfindungen jener vieles hinzufügten; so daß Leon nicht nur die Elemente, in Hinsicht auf Menge und Anwendbarkeit der bewiesenen Sätze, sorgfältiger zusammen stellte, sondern auch die Bestimmung erfand, wann die gesuchte Aufgabe möglich oder unmöglich ist. Eudoxus von Knidus, etwas jünger als Leon und Anhänger des Platon, vergrößerte zuerst die Anzahl der allgemeinen Lehrsätze, und fügte zu den drey Proportionen noch drey andere hinzu [diese sind ziemlich überflüßig, und haben in der Mathematik wenig Glück gemacht. Montucla I. S. 197.], und vermehrte die Sätze über den Schnitt, über welche Platon die Untersuchung begonnen hatte, sehr ansehnlich, indem er auch die Analysen auf dieselben in Anwendung brachte. Amyklas von Heraklea, einer von Platon's Freunden, ferner Menächmus, Zuhörer des Eudoxus und im Genuß von Plato's Umgang, so wie auch dessen Bruder Dinostratus brachten die ganze Geometrie zu noch größerer Vollkommenheit. Theudius von Magnesia stand in dem Rufe, sowohl in der Mathematik als auch in den übrigen Theilen der Philosophie ausgezeichnet gewesen zu seyn denn er stellte die Elemente sehr gut zusammen, und viele besondere Sätze machte er allgemeiner. Außerdem that sich auch der Athener Kyzikinos, der um dieselbe Zeit lebte, sowohl in den andern mathematischen Wissenschaften, als auch am meisten in der Geometrie hervor. Diese verkehrten mit einander in der Akademie, indem sie die Untersuchungen gemeinschaftlich machten. Hermotimus von Kolophon erweiterte das, was Eudoxus und Theätetus zuvor geliefert hatten, erfand viele zu deu Elementen gehörige Sätze, und schrieb auch einige

der Geist der Platonischen Schule, aus welchem dieselbe die Mathematik und den Unterricht dieser Wissenschaft betrachtete, auf Euklid übergegangen seyn? Wie vielmehr wird das der Fall seyn, wenn Euklides, was höchst wahrscheinlich ist, die Geometrie aus dem Munde jener Männer und ihrer Nachfolger selbst gehört hat? Wie sehr und wie leicht sich der Geist einer Schule, die Lehransicht und Lehrmethode derselben, fortpflanzen, und von den Lehrern auf die im Lehramte nachfolgenden Schüler übergehen, wie sehr dieß namentlich bey der Platonischen Schule der Fall war, zeigt unter andern die bekannte Antwort des Xenokrates, des Nachfolgers Platon's nach Speusippus *) Als sich einer zu seinem Unterrichte meldete, der ganz fremd in der Geometrie und Arithmetik war,

---

geometrische Oerter nieder. Philippus (Φιλιππος ὁ Μεταιος), der ein Schüler des Platon und von ihm zur Mathematik besonders aufgemuntert worden war, richtete nicht nur seine Untersuchungen nach Platon's Anordnung ein, sondern setzte sich selbst auch solche Aufgaben zur Auflösung vor, von welchen er glaubte, daß sie die Platonische Philosophie befördern könnten. Die Geschichtschreiber der Mathematik theilen nun so weit die Vervollkommnung dieser Wissenschaft mit. Nicht viel jünger als diese aber ist Euklides, welcher die Elemente sammelte, viele Sätze des Eudoxus ordnete, viele Sätze des Theätetus vervollkommnete, und, was seine Vorgänger zu oberflächlich dargethan hatten, auf unwiderlegliche Beweise gründete. Dieser Mann lebte aber zu den Zeiten des ersten Ptolemäus. Denn auch Archimedes [250 vor Chr.] erwähnt des Euklides in seinem ersten Buche [nämlich von der Kugel und dem Cylinder]. Er ist also jünger als die Schüler und Freunde des Plato, aber älter als Eratosthenes und Archimedes; denn diese sind einander gleichzeitig, wie auch Eratosthenes sagt. Der Secte nach ist er Platoniker, und mit dieser Philosophie vertraut. Siehe oben S. 29 angef. Ausg. des Proklus S. 19. — Hauber a. a. O. S. 2 u. 3.

*) Montucla I. S. 203.

hieß ihn der Philosoph wieder weggehen; denn er habe die Handhabe der Philosophie noch nicht." *)

Es verdient hier bemerkt zu werden, daß die Mathematik demnach ihre erste bedeutende Ausbildung (was sie nämlich in den Händen der Aegyptischen Priester gewesen war, bey welchen Thales, der 590 Jahre vor Chr. blühte **), und später als dieser, Pythagoras ***) nothdürftig lernten, davon wissen wir wenig), der hohen und wohl verdienten Meinung verdankt, welche die Didaktik oder Lehrkunst ****) von ihrem Einflusse auf Uebung und Schärfung des Verstandes gefaßt hatte. Von der Mathematik selbst macht die Platonische Schule auf ihre Philosophien gar keine Anwendung. Um so bewundernswürdiger ist die Weisheit des erhabenen Stifters derselben, der so tiefe Blicke in die Kräfte des menschlichen Verstandes that, und nicht verschmähte, denselben durch eine Wissenschaft zu bilden, welche in Hinsicht auf den Gegenstand so weit von dem Wege ablag, den der Lehrer der Philosophie seine Schüler zu führen gedachte, und welche er später nicht einmal als Hülfswissenschaft gebrauchen konnte. Damals wußte selbst der Physiker von der Mathematik als Hülfswissenschaft noch keinen Gebrauch zu machen. Nach Euklides aber hat die Didaktik aufgehört, zur Erweiterung der Gränzen der mathematischen Wissenschaft unmittelbar (denn davon, ob einzelne große Mathematiker zuerst durch den Schulunterricht geweckt worden seyen, oder nicht, ist hier nicht die Rede) auf eine

---

*) Montucla I. S. 3.

**) Jb. S. 99.

***) Jb. S. 112.

****) Zu den didaktischen Gründen, aus welchen die Alten die Mathematik unter die Gegenstände ihres Unterrichtes aufnahmen, kommen in unsern Zeiten noch pädagogische hinzu, welche die Mathematik als Gegenstand des Unterrichts an Gymnasien, die von noch unerwachsenen Schülern besucht werden, empfehlen.

namhafte Weise beyzutragen. Archimedes (er starb 212 vor Chr. *) trieb die Mathematik um ihrer selbst willen **); und in neuern Zeiten verdankt die Mathematik die hohe Stufe, die sie erstiegen hat, gewiß nicht einem didactischen oder pädagogischen Bedürfnisse, sondern theils dem rein geistigen Interesse, das sie ihren Bearbeitern gewährt, theils aber und vorzüglich der Naturlehre (Astronomie, Mechanik, Optik), für welche sie ein unentbehrliches Organon ***) geworden ist.

Die Hauptaufgabe, die Euklid der Wirksamkeit seines Lebens vorgesetzt hatte, war demnach der **Unterricht**. Er lehrte die Mathematik im Geiste der Platonischen Schule als Bildungsmittel des auf das Studium der Philosophie vorzubereitenden Verstandes. Unmittelbare Nachrichten über die Früchte seines **practischen Lehramtes** haben wir nicht. Die alten Geschichtschreiber der Mathematik ****), deren Werke verloren ge-

---

*) Montucla I. S. 245.

**) Vgl. Klügel's Mathem. Wörterb. III. S. 624.

***) **Organon**, z. B: **wenn** die Schwerkraft auf einen frey fallenden Körper beständig fortwirkt, so verhalten sich die durchfallenen Räume wie die Quadrate der Zeiten. Oder umgekehrt: **wenn** sich bey frey fallenden Körpern die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten verhalten, so wirkt die Schwerkraft auf den frey fallenden Körper beständig fort. Daß beyde Sätze in einem nothwendigen Zusammenhange stehen, so daß, wenn der eine wahr ist, der andere ebenfalls wahr seyn muß, lehrt die Mathematik. Die Mathematik ist also für den Physiker ein Instrument, den Zusammenhang physikalischer Wahrheiten einzusehen, und aus einem als wahr erkannten physikalischen Satze andere physikalische Sätze abzuleiten.

****) Unter diese gehören: **Theophrastus**, **Eudemus** und **Geminus**. Theophrastus, Nachfolger, und Eudemus, ein anderer Schüler des Aristoteles (Montucla I. S. 207) mögen alt gewesen seyn, als Euklides in der Blüthe stand. Ihnen verdanken wir, was uns Proklus über die Verdienste der Platonischen Schule um die Mathematik (S. oben S. 32) mitgetheilt hat. Geminus aus Rhodus aber mag ein bis anderthalb Jahrhun-

gangen sind, hielten es entweder für außer ihrem Plane, die Leistungen der mathematischen Classe (wenn ich so reden darf) der Alexandrinischen Schule als Unterrichts-Anstalt *) zu berichten, oder die ihnen nachfolgenden mathematischen Schriftsteller, die ihre Geschichten benutzt haben, haben die Berichte über solche Leistungen nicht aufgenommen. Daß aber Euklid als vortragender Lehrer eben so bedeutend, vielleicht noch bedeutender denn als Schriftsteller, geschweige denn als Erweiterer der mathematischen Wissenschaften und Erfinder neuer Wahrheiten war, dieß anzunehmen, haben wir mehrfache Gründe: 1) die bereits oben bewiesene didaktische Tendenz seiner Pseudarien. Eine gleiche Tendenz werde ich weiter unten seinen Porismen unterlegen. Euklid hatte also über seine Lehrmethode viel nachgedacht, und sich viel mit dieser Angelegenheit beschäftigt. Es ist nicht anders möglich, als daß daraus ein günstiger Erfolg für seinen Unterricht selbst erwuchs. 2) Die bekannte Anekdote mit dem König Ptolemäus scheint darauf hinzudeuten, daß Euklid bey diesem großen Beförderer der Wissenschaften in dem Zutrauen eines mit Glück unterrichtenden Lehrers stand. „Man erzählt nämlich, als Euklid einst vom Ptolemäus gefragt worden sey, ob sich kein kürzerer Weg zur Erlernung der Geometrie einschlagen lasse, habe er geantwortet, es gebe keinen besonderen Weg für Könige,

---

derte nach Euklid gelebt haben. (Montucla I. S. 276.) Er schrieb unter andern sechs Bücher geometrische Geschichten. „Die häufigen Citationen des Proklus (sagt Montucla) welcher alles, was er über die Geschichte und Philosophie der Geometrie sagt, daraus gezogen zu haben scheint, können uns eine Idee davon verschaffen. Es mußte ein historischer Commentar, eine Art von philosophischer Entwickelung der geometrischen Entdeckungen seyn. Man kann nicht genug bedauern, daß ein so interessantes und lehrreiches Werk nicht bis zu uns gekommen ist."

*) Die Schule zu Alexandria war nämlich Unterrichts-Anstalt und Akademie der Wissenschaften zugleich.

der zur Geometrie führe."*) 3) Wir finden zwar keine so große Schaar Euklidischer Schüler aufgezeichnet, der ähnlich, die wir aus Proklus als Schüler und Anhänger des Plato kennen gelernt haben. Allein zu den Zeiten Euklids war es schon schwerer sich in der Mathematik durch neue Erweiterungen dieser Wissenschaft auszuzeichnen, als zu den Zeiten des Plato, und die Bedürfnisse des mathematischen Unterrichts, als Vorschule der Philosophie, waren durch die geometrischen Erfindungen der Schüler des Plato bereits hinreichend befriedigt. Daß aber der mathematische Unterricht zu Alexandrien auch nach Euklid noch fortblühte, daß also der diesem Unterrichte günstige Geist der Platonischen Schule, den Euklid nach Alexandrien verpflanzte, noch fortwirkte, und daß die Lehrerwirksamkeit Euklids in ein kräftiges Leben getreten war, darüber gibt uns folgende Stelle des Pappus von Alexandrien (lebte im vierten Jahrhundert nach Chr.), die uns zugleich den Charakter Euklids von der schönsten und liebenswürdigsten Seite schildert, ein vollgiltiges Zeugniß**): „Euklides war in dem, was

---

*) Die oben ang. Griech. Ausg. des Proklus hat hier eine Lücke; sie hat nur die ersten Worte dieser Erzählung. Dagegen hat die vortreffliche Lateinische Uebersetzung des Barocius (Patavii 1560), dem noch mehrere Manuscripte des Proklus zu Gebothe standen, und der die Baseler Ausgabe als sehr unvollkommen beschreibt, die Erzählung, wie sie hier mitgetheilt wird, vollständig.

**) Die Stelle steht in der Einleitung zum siebten Buche seiner mathematischen Sammlungen, von welcher Einleitung wir weiter unten noch öfter Gebrauch machen werden. Pappus referirt nähmlich über die Kegelschnitte des Apollonius. Er theilt aus der Vorrede des Apollonius die Stelle mit, in welcher Apollonius selbst den Inhalt der acht Bücher seiner Kegelschnitte angibt. Der Inhalt seines dritten Buchs wird von Apollonius also angegeben: „Das dritte Buch enthält viele und bewundernswürdige Lehrsätze, welche nützlich seyn werden, sowohl zu Compositionen als zu Determinationen körperlicher Oerter, deren viele sehr schön und neu sind. Wir bemerken

er über die Kegelschnitte herausgab, ganz dem Aristäus, einem lichtvollen Schriftsteller, gefolgt. Er wollte es ihm weder zuvorthun, noch wollte er dessen Arbeit niederreißen. Denn er war sehr sanft und gütig gegen alle, vorzüglich gegen diejenigen, welche die Lehren der Mathematik (mathematicas disciplinas) von irgend einer Seite vermehren und erweitern konnten, wie auch recht ist, auf keine Weise feindselig und gehäßig, aber gründlich und genau, und nicht anmaßend, wie dieser (Apollonius). So viel über den geometrischen Ort durch seine Kegelschnitte gezeigt werden konnte, theilte er (Euklides) mit. Er fügte nicht hinzu, daß es vollendet und vollkommen sey; denn dann hätte er (Apollonius) ihn mit Recht tadeln können. So aber durfte er es nicht, zumal da er selbst in seinen Kegelschnitten manches Unvollkommene hinterließ, und nicht einmal achtsam genug war, es zu bemerken. Dem Orte konnte er aber leicht das Fehlende hinzusetzen. Er brauchte nur das zu überdenken, was Euklid über den Ort geschrieben hatte; und zudem studierte er lange Zeit unter den Schülern des Euklides zu Alexandria, woher er sich die außerordentliche Geschicklichkeit in der Mathematik erwarb, und niemals getäuscht wurde" *) Pappus spricht hier also

---

hierbey, daß Euklid [Euklid hat nämlich auch 4 Bücher über die Kegelschnitte geschrieben] den Beweis der Composition des Ortes zu drey und vier Linien nicht gegeben hat, oder wenigstens nur einen kleinen Theil desselben, und diesen mit nicht viel Glück. Diese Composition könnte aber auch nicht richtig und vollständig durchgeführt werden, ohne das, was wir erfunden haben." Ich bediene mich der Lateinischen Uebersetzung des Commandinus: Federici Commandini Urbinatis Commentaria in libros octo mathematicarum Collectionum Pappi Alexandrini e Graeco in Latinum a se accuratissime conversos. Pisauri 1602; daselbst Blatt 164.

*) In der eben erwähnten Latein. Uebers. des Pappus ist dieser letzte Satz sehr unklar. Er heißt nämlich so: Adjicere autem loco, quae deerant, facile potuit, animo comprehendens ea,

von einer Euklidischen Schule, und betrachtet den Apollonius von Pergen, der 200 Jahre vor Chr. blühte, als

---

quae ab Euclide de loco scripta fuerant, et dans operam Euclides discipulis Alexandriae longo tempore, ex quo adeo excellentem in mathematicis habitum est assecutus, neque usquam deceptus est. Ueberhaupt muß man in der ganzen oben mitgetheilten Stelle fast überall rathen, ob vom Apollonius oder vom Euklid die Rede ist. Da Montucla (a. a. O. S. 256) sagt: Nous apprenons de Pappus, qu' Apollonius se forma à Alexandrie sous les successeurs d'Euclide, et que ce fut-la qu'il acquit cette habileté superieure en Geometrie, qui le rendit fameux; und da ich noch an andern Orten erwähnt finde, daß Apollonius lange Zeit zu Alexandria studirt habe: so muß ich, in der Voraussetzung, daß jene aus bessern Quellen geschöpft haben, als mir zu Gebothe standen, den letzten Satz der Stelle des Pappus wohl so verstehen, wie ich ihn oben übersetzt habe. Aber auch anders verstanden, daß nämlich Euklid den geometrischen Ort leicht selbst hätte ergänzen können, da er sehr lange Zeit zu Alexandria der Bildung der Schüler seine Sorgfalt widmete, und dadurch eine so große Fertigkeit und Aufmerksamkeit im Denken über mathematische Gegenstände erhielt; — auch so verstanden, gibt die Stelle ein sehr bestimmtes Zeugniß über die Lehrerthätigkeit Euklids. Wie wenig man sich übrigens in dergleichen Fällen auf den sonst geistreichen und höchst verdienstvollen Französischen Geschichtschreiber der Mathematik verlassen kann, zeigt das Urtheil, das er unmittelbar darauf dem Pappus über den Apollonius unterlegt: Le même Auteur nous fait une peinture peu avantageuse des autres qualités d'Apollonius: il nous le represente comme un homme vain, jaloux du merite des autres, et saisissant volontiers l'occassion de les deprimer. Faut-il que les perfections de l'esprit soient si souvent ternies par les defauts du coeur? Dieß ist eine sehr große Uebertreibung dessen, was Pappus sagt. Pappus nennt den Apollonius nur arrogans, d. h. hier einen, der sich mehr Verdienste zueignet, als er sollte. Und dieß Urtheil des Pappus ist schon zu hart, wenn es bloß, wie es scheint, aus dem gefolgert ist, was Apollonius von dem dritten Buche seiner Kegelschnitte (S. oben S. 38) sagt. Das Schlimmste,

einen Genossen derselben. Apollonius aber erhielt von den Alten den Beynamen des großen Geometers *), einen Namen, dessen er auch in unsern Zeiten nicht unwürdig wäre. Auch vor Apollonius werden schon ausgezeichnete Mathematiker genannt, die ihre Studien in Alexandria gemacht, oder dort gelebt und gelehrt haben. Nur ist es schwer zu bestimmen, ob sie gerade als Früchte der Euklidischen Schule zu betrachten sind, da auch die Astronomie sich einer ganz besonderen Pflege in der Schule zu Alexandria erfreute **). Hierher gehören Conon aus Samos ***) und Eratosthenes ****), beydes Freunde von Archimed. 4) Einen vierten Grund gibt die Vortrefflichkeit seines geometrischen Lehrbuches, nämlich seiner Elemente. Ich habe mich zwar oben (S. 29.) darauf berufen, daß das, was ich über Euklid als Lehrer sagen würde, uns nicht wenig bestimmen werde, die Vollendung, Anordnung und Durchführung seiner Elemente, in der Gestalt, wie sie zu uns gekommen sind, nicht erst dem Theon, sondern ganz ihm selbst zuzuschreiben. Umgekehrt aber reicht das bereits Gesagte hin, um zu beweisen, daß Euklid die Elemente in der Vollkommenheit, in der wir sie besitzen, verfassen konnte. Wenn wir die oben (S. 32. in der Note) angeführten älteren, von den Schülern Plato's geschriebenen, Lehrbücher der Geometrie noch besäßen, so würden wir wahrscheinlich den Sprung von diesen zu den Euklidischen Elementen in Hinsicht auf Vollkommenheit nicht so sehr groß finden. Archimedes ferner, der Newton der

---

was sich daraus auf den Character des Apollonius schließen läßt, ist eine allzugroße Naivität. Er kennt seine großen Verdienste, und spricht davon, wie er davon denkt. Schicklicher wäre es freylich gewesen, davon zu schweigen, und großartiger, nicht viel daran zu denken.

*) Montucla a. a. O. S. 256.

**) Ib. S. 226.

***) Ib. S. 265.

****) Ib. S. 252.

Alten, war nicht Lehrer (wenigstens geschieht dessen nirgends Erwähnung); gleichwohl ergibt sich aus seinen Schriften, daß ihm die Euklidische Form der Geometrie geläufig war; nur befolgt er diese Form nicht mit der Gründlichkeit und Aengstlichkeit, wie der selbst lehrende Euklid; man bemerkt sogleich, daß es ihm mehr um die Erweiterung der Wissenschaft, als um die Darstellung derselben zu thun war. Der um die Form weniger bekümmerte Archimed hat sicherlich diese Form nicht zuerst geschaffen, sondern er ist dem Beyspiele und Muster seiner Vorgänger gefolgt. Das bereits Gesagte reicht aber auch hin zu beweisen, daß Euklid seinen Elementen die Vollkommenheit der Darstellung, die sie besitzen, geben w o l l t e. Wenn wir z. B. (vgl. oben S. 29.) annehmen wollten, daß nur die Propositionen der Aufgaben und Lehrsätze (προτασεις, propositiones) von Euklid herrührten, die Auflösungen und Beweise derselben aber von Theon hinzugefügt wären; so wäre zu Euklids Zeiten und unter Euklids Verhältnissen eine solche Einrichtung eines geometrischen Lehrbuchs gewiß nicht zweckmäßig gewesen. Euklid durfte seinen Schülern kein Lehrbuch geben, das unvollständig und voll von Lücken war, die erst durch den mündlichen Unterricht ausgefüllt werden sollten, wie wir dieses in unsern Zeiten wohl thun dürfen, wo wir diejenigen Schüler, die dem mündlichen Unterricht nicht gehörig gefolgt seyn, oder ihn zum Theil wieder vergessen haben sollten, auf irgend eines unserer vielen und guten gedruckten Handbücher verweisen können. Auch hatte Euklid keine Kinder zu Schülern, wie wir, die noch nicht den ernsten Willen zum Lernen haben (den T r i e b unserer Kinder zum Lernen läugne ich hiermit nicht ab, wohl aber den W i l l e n, der einen schon ausgebildeten Charakter voraussetzt), denen wir die Mathematik durch alle uns zu Gebothe stehenden Mittel annehmbar machen, und in deren Kreis wir den Unterricht eben so wohl herab stimmen, als dieselben zu unserem Unterrichte herauf ziehen müssen. Für die M ä n n e r, welche Euklid in der Geometrie unterrichtete, und für den Zweck, den er seinem Unterrichte

vorsetzte, läßt sein Lehrbuch wenig zu wünschen übrig *). Demnach, mag auch Theon Einiges an den Elementen des Euklid geändert, mag er auch an dem Gebäude derselben hier und da gebessert haben, das Hauptverdienst wird immer dem Verfasser, nach dem wir das Werk benennen, dem Euklides selbst bleiben; und umgekehrt ist uns dieses Werk ein sprechendes Zeugniß seiner Lehrervortrefflichkeit. Sehr charakterisirend ist in dieser Hinsicht das Urtheil des Proklus über dasselbe **): „Vorzüglich wird aber jeder den Euklides in Hinsicht seines Unterrichtes in den Anfangsgründen der Geometrie bewundern, der Anordnung und Auswahl der Lehrsätze und Aufgaben wegen, die zu den Elementen gehören. Denn er nahm nicht Alles auf, was ihm zu sammeln möglich, sondern nur das, was zum Unterrichte in den Anfangsgründen tauglich und passend war." Euklid leistete also auch diesem Erforderniß eines guten Lehres Genüge, daß er nicht alles vortrug, wozu sich die Gelegenheit darbot, sondern planmäßig nur das, was ihm zu dem Zwecke seines Unterrichtes dienlich war ***). In den Elementen Euklids mögen

---

*) Man vergleiche damit, was Montucla a. a. O. I. S. 222 sagt: „Welchen Vorzug ich auch den Elementen Euklids vor den neueren Werken dieser Art gebe, so läugne ich doch keineswegs die Nützlichkeit dieser letzten. Man kann ihnen das Gute nicht absprechen, daß sie das Studium der Geometrie leichter gemacht, und den Geschmack daran verbreitet haben. — — — Wenn ich die Geometrie zu lehren hätte, so würde ich keinen Anstand nehmen, mich derselben zu bedienen. Wenn ich jedoch einen Kopf mit ausgezeichneten Anlagen fände, mit dem Genie, das den künftigen Geometer verkündigt, so würde ich ihm kein anderes Buch rathen als den Euklid. In meiner Ansicht der Sache wurde ich durch einen geschickten Mathematiker bestärkt, der sehr erfahren in der Kunst des Unterrichtes ist, und den ich nennen würde, wenn ich glaubte, daß er es gut hieße."

**) Proclus Hervagii S. 20. Hauber a. a. O. S. 4.

***) Ich nannte es oben (S. 28.) ein unbewiesenes Urtheil, wenn

wenige Sätze vorkommen, die nicht schon vor Euklid erfunden waren *). Gleichwohl sind die Elemente dasjenige Werk, durch

behauptet wird, daß eine jede Abweichung von der Euklidischen Methode ein Abweg von dem richtigen Gange in der Geometrie sey. Eben so unbewiesen (man kann fast sagen, schwach und beschränkt) ist das Urtheil, daß gerade die Auswahl und Anordnung der Sätze, die wir in Euklid finden, die allein richtige und nothwendige sey. Euklid hat gewiß selbst nicht daran gedacht, in dieser Hinsicht etwas Unübertreffliches liefern zu wollen. In der Auswahl derjenigen Sätze, die er mehr um ihrer selbst willen und nicht etwa bloß als Hülfssätze für andere daraus zu beweisende Sätze in seine Elemente aufgenommen hat, ist er sicherlich nur seinem didactischen Tacte, schwerlich aber der Ansicht gefolgt, daß die Aufnahme derselben in seine Elemente nothwendig sey. Und was die Anordnung und Aufeinanderfolge der Sätze betrifft, so hat er die seinige gewiß nicht für die allein mögliche und nothwendige gehalten, sondern er hat von den vielen möglichen eine gewählt, die sich ihm gerade dargebothen hat, ohne diese selbst für die beste aller möglichen zu halten. Er hat sich nur bemüht, in der von ihm gewählten Anordnung lückenlos, fehlerfrey, gründlich, klar und einfach zu bleiben; und dieß ist ihm bey seiner Geschicklichkeit und Genauigkeit in Behandlung geometrischer Gegenstände besser geglückt, als vielleicht Allen, die vor und nach ihm einen ähnlichen Versuch gemacht haben. Er, dem die Mathematik die Vorschule zur Philosophie war, gab in seinen Elementen ein Muster einer folgerechten wissenschaftlichen Darstellung, in der die Schlüsse richtig aus den Vordersätzen abgeleitet, und keine Vordersätze angewandt werden, über die der Leser nicht vorher verständigt und ins Klare gesetzt worden ist. Dieser strengen Folgerechtigkeit opfert er selbst andere Eigenschaften einer guten Darstellung auf. Er lehrt z. B. im ersten Satze des ersten Buches, über einer gegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben; und erst im 22sten Satze des ersten Buches lehrt er aus drey gegebenen Linien, deren je zwey zusammen größer als die dritte sind, ein Dreyeck zu verfertigen. Diesen letzten Satz bedarf er früher nicht, indem ihm der erste, da wo er diesen

*) Vgl. oben die Note S. 32.

welches Euklid seine Unsterblichkeit als Schriftsteller erlangt hat. Seine übrigen mathematischen Arbeiten haben weniger Aufmerksamkeit erregt.

So viel über Euklid als Lehrer. Ich glaubte, es wäre in einem Buche, das Lehrern der Geometrie gewidmet ist, nicht

---

letzten ebenfalls anwenden könnte, vollkommen ausreicht; und da die Verfertigung eines Dreyecks aus drey gegebenen Linien die Bedingung voraussetzt, daß je zwey derselben zusammen größer als die dritte sind, die Nothwendigkeit dieser Bedingung aber erst durch den 20sten Satz (daß nämlich in jedem Dreyecke jede zwey Seiten zusammen größer als die dritte sind) bewiesen wird: so ist diese Euklidische Anordnung wohl ganz folgerecht; allein demungeachtet ließe sie in Hinsicht auf Vollkommenheit noch Manches zu wünschen übrig, wenn überhaupt eine weiter gehende Vollkommenheit in so unwichtigen Dingen eines besonderen Wunsches werth wäre. — Beyspiele von Sätzen, die Euklid wohl noch im Stande war aufzunehmen, aber nicht aufgenommen hat, weil er es für gut hielt, sie wegzulassen, sind (falls ich nicht aus Unaufmerksamkeit irre): die Verfertigung eines Dreyecks aus zweyen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, und die Verfertigung eines Dreyecks aus einer Seite und zwey anliegenden Winkeln. Beyder Sätze bedurfte er nicht in dem folgerechten Gange seiner Darstellung, und um ihrer selbst willen schienen sie ihm der Aufnahme nicht werth. So hat er ebenfalls die lunula Hippocratis nicht aufgenommen, obgleich sie ihm, bey dem Aufsehen, das sie unter den Geometern machte und in gewisser Hinsicht wohl verdiente, gewiß bekannt war. — Benzenberg scheint in unseren Zeiten, wo so viel über Methode des mathematischen Unterrichtes gesprochen und geschrieben wird, folgende Bemerkung nicht für überflüssig gehalten zu haben: „Viele Lehrer, die Unterricht in der Mathematik geben, verstehen selber so recht viel nicht davon; diese sagen nun alles was sie wissen, und dieß ist unter allen schlechten Methoden des Vortrags eine der schlimmsten. Nur dieß, was er weise verschweigt, zeigt mir den Meister des Styls, sagt Göthe.“ Benzenberg die höhere Rechenkunst u. s. w. Düsseldorf 1813, in der Einleitung S. XVII.

am unrechten Orte. Ich habe es hier um so lieber aufgenommen, da es zugleich eine Rechtfertigung abgibt, wenn dem Euklid in Hinsicht auf Form der geometrischen Darstellung eine so hohe Autorität beygelegt wird.

Stellen aus Proklus,
über die verschiedenen Sätze in der Geometrie.

Die Form der geometrischen Darstellung war den alten Mathematikern und Philosophen eine große Angelegenheit *). Am meisten lesen wir darüber in dem schon mehr erwähnten Commentar des Proklus zum ersten Buche der Euklidischen Elemente. Hierher gehören vorzüglich drey Stellen. Die erste steht im zweyten Buche des Commentars am Ende der durch das erste Buch und einen großen Theil des zweyten sich erstreckenden allgemeinen Einleitung, ehe der specielle Commentar über die einzelnen Erklärungen anfängt, und handelt von den verschiedenen Arten der geometrischen Sätze. Die zweyte Stelle, am Anfange des dritten Buches, theilt verschiedene Meinungen über den Unterschied zwischen Axiom und Postulat mit, und macht davon Anwendung auf diese Sätze in Euklids erstem Buche. Die dritte Stelle endlich gibt die Theile an, aus welchen wieder die Aufgaben und Lehrsätze zusammen gesetzt sind, und findet sich ebenfalls im dritten Buche des Commentars als Bemerkung zu Euklids ersten Buches erstem Satze, der bekanntlich eine Aufgabe ist. Daß ich es nicht dabey bewenden lasse, über diese Stellen auf die Griechische oder Lateinische Ausgabe des Proklus, oder auf Hauber's Chrestomathia geometrica, worein sie ebenfalls aufgenommen sind, zu verweisen, sondern eine wörtliche, jedoch die Verständ-

---

*) Auch solche Philosophen unter den Nachfolgern und Schülern des Plato, die keinen speciellen Ruf als Mathematiker erlangt haben, wie Aristoteles, Speusippus und Amphinomus, haben sich dennoch mit diesem Gegenstande beschäftigt. S. unten S. 48. ff.

lichkeit des Sinnes berücksichtigende, Deutsche Uebersetzung hier mittheile, bedarf keiner weiteren Rechtfertigung.

Erste Stelle des Proklus, nähmlich: über die verschiedenen Arten der geometrischen Sätze *).

„Die ganze Anordnung der Sätze werden wir nun auf folgende Art angeben. Da wir sagen, daß diese ganze Wissenschaft, die Geometrie nähmlich, auf Voraussetzung beruhe (’εξ ὑποϑεσεως ’ειναι), und aus bestimmt ausgesprochenen Prinzipien (’αρχαι ὡρισμεναι) die der Reihe nach folgenden Sätze beweise — — so muß ein construirender Unterricht in den Elementen der Geometrie die Prinzipien der Wissenschaft besonders geben, und die Folgerungen aus den Prinzipien wieder besonders; von den Prinzipien muß er keinen Grund angeben, wohl aber von dem, was auf die Prinzipien folgt. Denn keine Wissenschaft beweist ihre eigenen Prinzipien, noch macht sie Worte über dieselben, sondern sie hält dieselben für aus sich selbst wahr; und sie sind ihr evidenter als die aus ihnen abgeleiteten Sätze. Denn jene erkennt sie durch sich selbst, diese aber erst durch jene. — — Wenn Jemand die Prinzipien und die aus den Prinzipien abgeleiteten Sätze (τα ’απο των ’αρχων) mit einander vermengt, so verwirrt er die ganze Erkenntniß und mischt unter einander, was nicht zusammen gehört. — Zuerst also müssen, wie gesagt, die Prinzipien und die den Prinzipien nachfolgenden Sätze von einander getrennt werden. Dieß thut auch Euklides, so zu sagen, bey jedem Buche, und vor dem ganzen Werke setzt er die allgemeinen Prinzipien (τας κοινας ’αρχας) dieser Wissenschaft fest. Hierauf theilt er die allgemeinen Prinzipien selbst in Voraussetzungen, Forderungeu und Grundsätze (’υποϑεσεις, ’αιτηματα und ’αξιωματα). Denn alle diese sind unter einander verschieden, und Grundsatz, Forderung und

*) Proclus Herv. S. 21—23; Barocius S. 43—47; Hauber a. a. O. S. 14—19.

Voraussetzung sind nicht einerley, nach dem, was irgendwo der göttliche Aristoteles sagt; sondern wenn der unter die Prinzipien aufgenommene Satz dem Lernenden bekannt ist und durch sich selbst für wahr gehalten wird, so ist derselbe ein Grundsatz, wie daß, was demselben gleich ist, auch unter sich gleich sey. Wenn aber der Hörende keine durch sich selbst für wahr gehaltene Einsicht des Gesagten erhält, dieselbe gleichwohl annimmt, und dem sie annehmenden zugesteht; so ist dieses eine Voraussetzung: denn daß der Kreis eine solche Figur sey, haben wir zwar nicht, als allgemeinen Satz, zum Voraus angenommen, ehe wir uns um die Wissenschaft bekümmert hatten (ἀδιδάκτως), wenn wir es aber hören, gestehen wir es ohne Beweis zu. Wenn aber endlich das Gesagte noch unbekannt ist, uud ohne Rücksicht darauf, ob es der Lernende zugesteht oder nicht, gleichwohl angenommen wird, dann, sagt er, nennen wir es eine Forderung; wie, daß alle rechte Winkel einander gleich seyen*).

---

*) Hauber läßt dieses Beyspiel zu der Aristotelischen Definition einer Forderung, in der Stelle des Proklus, die er in seine Chrestomathie aufgenommen hat, aus, obgleich er die Definition selbst den Lesern seiner Chrestomathie nicht vorenthält. Was mag ihn wohl zu dieser Auslassung bewogen haben? Das Beyspiel paßt zwar nicht zu unserem, dermalen allgemein angenommenen und fest gewordenen Begriffe eines Postulates, wie wir αιτημα übersetzen, („Grundsätze sind theoretische Sätze, die schon für sich oder als Ableitungen von vorher gegangenen Erklärungen offenbar genug sind, um von jedem vernünftigen Menschen eingestanden werden zu müssen. Postulate sind praktische Sätze, wodurch die Darstellung eines Gegenstandes verlangt wird, deren Möglichkeit unmittelbar aus dem Begriffe des Gegenstandes erkannt wird.“ Langsdorf's Anfangsgründe S. 7. und 8. — „Quicquid ex consideratione eorum, quae in una definitione continentur, immediate deducitur, Axioma vocatur, si quid rei convenire aut non convenire enuntiet; Postulatum vero, si quid effici posse affirmet vel neget.“ Wolfii Elementa etc. Tom. I. p. 10. — U. s. w.) Wohl paßt es aber zu

— — Nach der Lehre des Aristoteles also werden auf diese Weise Grundsatz, Forderung und Voraussetzung unterschieden.

---

es aber zu der Aristotelischen Definition eines ἀιτημα. Denn die Forderung an den Lernenden, zuzugeben, daß alle rechte Winkel einander gleich seyen, ist in der That nicht so ganz gering. Damit der Lernende diesen Satz zugeben könne und für wahr halte, darf er nicht mehr ganz ἀδιδακτος seyn. Er muß einen Begriff von Winkel haben; er muß wissen, daß die Größe desselben nicht von der Größe seiner Schenkel, sondern von der Größe ihrer Abweichung abhängt; er muß einsehen, daß die Größe dieser Abweichung etwas Meßbares ist (daß z. B. ein Winkel so groß seyn kann, als zwey andere zusammen genommen); er braucht ferner den Begriff von Nebenwinkel; er muß einsehen, daß die Summe zweyer Nebenwinkel eine unveränderliche Größe ist, daß nämlich, wie der eine von zwey Nebenwinkeln größer, der andere um eben so viel kleiner wird, daß jede zwey Nebenwinkel zusammen genommen jeden zwey andern Nebenwinkeln zusammen genommen, gleich sind, und daß es nur eine Lage des gemeinschaftlichen Schenkels zu der geraden Linie der beyden andern Schenkel gibt, in welcher die beyden Nebenwinkel einander gleich sind. Ob nun der Lernende das alles zugibt oder nicht (και μη συγχωρουντος του μανθανοντος), und, wenn er es zugibt und einsieht, ob er mit der wissenschaftlichen Begründung desselben zufrieden ist, oder nicht; darauf kommt es, nach Aristoteles, nun nicht weiter an. Genug, es wird von dem Lernenden gefordert, daß er den Satz zugebe, und es sich gefallen lasse, daß derselbe in künftigen Beweisen (z. B. beym Euklidischen Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes) als Obersatz zu richtigen Schlüssen gebraucht werde. Daß diese Forderung wirklich nicht für gering geachtet werde, erhellt daraus, daß in vielen neueren Lehrbüchern der Geometrie (z.B. von Legendre und Kries) der Satz, daß alle rechte Winkel einander gleich sind, als Lehrsatz aufgeführt und mit einem Beweise versehen worden ist. Proklus theilt im Anfange des dritten Buches seines Commentars noch andere Ansichten über den Begriff von Axiom und Postulat mit. Die Stelle darüber ist die zweyte von mir mitgetheilte Stelle aus Proklus. Wir sehen daraus, daß die Alten über diese Begriffe nicht einig wa-

Oefters werden auch alle diese Sätze ohne Unterschied Voraus-setzungen genannt: Auf dieselbe Art nennen die Stoiker einen

---

ren. Welches die Euklidische Ansicht der Sache war, läßt sich nicht ausmitteln, da in verschiedenen Exemplaren der Elemente die einzelnen Postulate und Axiome des ersten Buches verschieden abgetheit und numerirt sind, man also nicht mit Bestimmtheit angeben kann, welchen Satz Euklid selbst für ein Postulat oder für ein Axiom gehalten wissen will. In der mehr erwähnten Baseler Ausgabe des Euklid haben die Erklärungen gar keine Ueberschrift erhalten. In dem mit derselben Ausgabe verbundenen Commentar des Proklus ist (p. 24.) der Uebergang von der allgemeinen Einleitung zu dem Commentar über die Erklärungen ganz corrupt. Dort steht nähmlich Zeile 5 der Satz: *το 'ουν 'ισοπλευρον μη 'εις 'απειρον εκταδη μεγεθος*, u. s. w. Hier fehlt zwischen den Wörtern *'ισοπλευρον* und *μη* nicht weniger als eine ganze Folioseite, wie aus der Uebersetzung des Barocius zu ersehen ist. In der Mitte dieser Folioseite fängt der Commentar zur ersten Euklidischen Erklärung an. Es läßt sich also hieraus nicht abnehmen, ob und wie Euklid seine Erklärungen überschrieben habe. Nach den Erklärungen kommt im Euklid die Ueberschrift *'αιτηματα;* unter derselben sind die drey in der Lorenzischen Uebersetzung stehenden Postulate enthalten. In dem Commentar des Proklus steht keine Ueberschrift. Das dritte Buch dieses Commentars fängt nähmlich (p 50.) mit der schon erwähnten Einleitung über den Unterschied von *'αιτημα* und *'αξιωμα* an, und geht dann unmittelbar (p. 51. am Ende) zur Aussprache jener drey Postulate selbst über: *'ητησθω 'απο παντος σημειου* u. s. w. In jenem Euklid endlich stehen unter der Rubrik *κοιναι 'εννοιαι* die zwölf in der Lorenzischen Uebersetzung enthaltenen Axiome. Von diesen 12 Axiomen stehen aber im Proklus das 10te und 11te als viertes und fünftes *'αιτημα* (p. 52 und 53.). Hierauf folgt (p. 54.) ohne besondere Ueberschrift die Aussprache der 10 übrigen Axiome (mit Ausnahme des Lorenzischen achten, dessen jedoch im Texte des Commentars Erwähnung geschieht), wobey er im Commentar sogleich er-

jeden einfachen Satz einen Grundsatz, so daß also nach diesen auch die Voraussetzungen Grundsätze, nach den andern aber die Grundsätze ebenfalls Voraussetzungen sind. Ferner werden die aus den Prinzipien abgeleiteten Sätze in

---

wähnt, diese wären die Sätze, welche nach dem Dafürhalten Aller unbeweisbare Axiome genannt würden. Ueber die Aussprache dieser Sätze bemerke man noch, daß sich daraus nicht abnehmen läßt, in welche Rubrik Euklid selbst sie gesetzt hat. Denn in jenem Euklid heißt das 10te Axiom: *και πασαι ῾αι ᾿ορθαι γωνιαι ᾿ισαι ᾿αλληλαις ᾿εισι*; und im Proklus heißt der Satz als vierte Forderung: *και πασας τας ᾿ορθας γωνιας ᾿ισας αλληλαις ᾿ειναι.*

Um meine Meinung (oder Vermuthung) über die Euklidische Ansicht zu sagen, so glaube ich, daß er der Aristotelischen Bestimmung des Unterschiedes von *᾿αιτημα* und *᾿αξιωμα* gefolgt ist, und daß das 10te und 11te Axiom der Lorenzischen Uebersetzung bey ihm ein viertes und fünftes *᾿αιτημα* waren; aus folgenden Gründen: 1) Proklus scheint kein Exemplar des Euklides gekannt zu haben, in welchem jene beyden Sätze nicht unter den Forderungen gestanden hätten; 2) die Unterscheidung in theoretische und praktische Sätze, Axiome und Lehrsätze auf der einen, Postulate und Aufgaben auf der andern Seite, so daß bey jenen etwas einzusehen, bey diesen aber etwas zu verfertigen ist, scheint erst von Geminus herzurühren, der lange nach Euklid lebte. 3) Dagegen waren die Schriften des Aristoteles dem Euklid gewiß nicht unbekannt. 4) die Unterscheidung des Aristoteles ist in der That weit fruchtbarer in Hinsicht auf wissenschaftliche Begründung der Geometrie, als die Unterscheidung des Geminus. Denn die Unterscheidung des Geminus kommt am Ende bloß auf eine Sache der Grammatik oder des Styls hinaus, ob ich mich des Indicativs oder Infinitivs bedienen will, ob ich sagen will: „von jedem Punkt läßt sich nach jedem andern eine gerade Linie denken," oder: „von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen." Jenes wäre nach Geminus ein *᾿αξιωμα* und dieses ein *᾿αιτημα*. Beydes ist aber am Ende einerley.

Aufgaben und Lehrsätze (προβληματα και θεωρηματα) eingetheilt. Jene enthalten das Entstehen der Figuren, das Theilen, das Abschneiden oder Verlängern derselben, und überhaupt alles, was mit denselben gemacht werden soll; diese zeigen die ihnen gemeinschaftlich und nothwendig zukommenden Eigenschaften. — — Schon Einige unter den Alten hielten dafür, Alles Lehrsätze zu nennen, wie die Anhänger des Speusippus *) und Amphinomus, welche der Meinung waren, für die theoretischen Wissenschaften sey der Nahme der Lehrsätze passender als der der Aufgaben, indem dieselben ja von ewigen Dingen handelten. Denn bey ewigen Dingen gibt es kein Entstehen, daher auch bey denselben die Aufgabe nicht Statt hat, welche die Entstehung oder Verfertigung von etwas verlangt, das früher noch nicht da war, wie die Verzeichnung eines gleichseitigen Dreyecks, oder die Beschreibung eines Quadrats über einer gegebenen geraden Linie, oder die Anlegung einer geraden Linie an einen gegebenen Punkt. Daher sey es besser gesprochen, sagen sie, daß Alles dieses ist; seine Entstehung betrachten wir nicht durch Verfertigung (ποιητικως), sondern durch Erkenntniß (γνωστικως), indem wir uns das, was immer war, nur gleichsam als entstehend denken; daher müssen wir auch sagen, daß Alles dieses lehrsatzweise (θεωρητικως) und nicht aufgabsweise (προβληματικως) angenommen werde. Andere aber hielten dafür, daß Alles Aufgaben seyen, wie die Mathematiker, die dem Menächmus **) anhingen. Das aber, was aufgegeben werde, sey doppelter Art: einmal das Gesuchte zu erfinden, und dann das Erfundene zu begreifen und einzusehen, ob es sey, oder wie es sey, oder warum es sey, und welche Verhältnisse es zum andern habe. Und beyde haben Recht. Denn die Schule des Speusippus sagt richtig:

---

*) Speusippus war der erste Nachfolger des Plato. Vgl. oben S. 34. Er lebte also noch vor Euklid.

**) Vor Euklid. S. oben S. 33. in der Note.

Die Aufgaben der Geometrie sind nicht von der Art, wie die der Künste und Gewerbe; denn diese sind für die Sinne, haben eine Entstehung und erleiden mancherley Veränderungen. Und die Schule des Menächmus sagt gleichfalls richtig: ohne Hand an Stoff zu legen, geschehen auch die Erfindungen der Lehrsätze nicht; ich meine Stoff des Verstandes: denn wenn die Gedanken sich an solchen machen und ihn bilden, so wird dieß gewiß sehr gut mit Erzeugungen verglichen. — — Diejenigen aber, welche einen Unterschied zwischen der Aufgabe und dem Lehrsatze machen *), sagen: eine jede Aufgabe lasse sowohl die über den Stoff derselben ausgesprochene Behauptung, als auch deren Gegentheil zu; ein jeder Lehrsatz aber lasse nur die Behauptung, nicht aber deren Gegentheil zu **). Unter Stoff verstehe ich aber die Gattung der Dinge, über welche die Untersuchung Statt findet, wie Dreyeck, oder Viereck, oder Kreis; unter der behaupteten Eigenschaft aber das, was ihm zukommt, wie das Gleichseyn, das Abschneiden, das Anlegen, oder irgend etwas anderes der Art. Wenn daher Einer verlangt, in einen Kreis ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben, so spricht er eine Aufgabe aus; denn es ist auch möglich in denselben ein Dreyeck zu beschreiben, das nicht gleichseitig ist. Eben so: Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu verzeichnen, ist eine Aufgabe; denn es ist möglich, auch ein nicht gleichseitiges zu verzeichnen. Wenn aber Einer sagt, Die Winkel an der Grundlinie der gleichschenk-

---

*) Ueber die Aufgaben und Lehrsätze in der Geometrie gibt es also (nach Proklus) unter den Mathematikern und Philosophen drey Hauptansichten: 1) Einige halten Alles für Lehrsätze, wie Speusippus und Amphinomus; 2) Andere halten Alles für Aufgaben, wie Menächmus; 3) Andere (und das sind die meisten) unterscheiden zwischen Aufgaben und Lehrsätzen. Diese letzten aber sind über den Unterschied von Aufgabe und Lehrsatz nicht einig, wie aus dem, was weiter folgt, erhellen wird.

**) Dieß ist auch der Unterschied zwischen einem kategorischen Satze und einer Frage.

ligen Dreyecke seyen einander gleich, [so spricht er einen Lehrsatz aus; denn es ist nicht möglich, daß die Winkel an der Grundlinie der gleichschenkligen Dreyecke auch ungleich seyen]*). Wenn daher Einer in der Form einer Aufgabe sagte, In den Halbkreis einen rechten Winkel zu verzeichnen; so würde er für unkundig der Geometrie gehalten werden; denn jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter **). Unter den Sätzen also

*) So haben Barocius und Hauber die eingeklammerte Stelle, welche in dem Proclus Hervagii ganz ausgelassen ist.

**) Diese Unterscheidung zwischen Aufgabe und Lehrsatz ist, wenn auch nicht treffend, doch gewiß sehr blendend. Ein jeder fühlt sogleich die Unschicklichkeit, die Aufgabe zu stellen: In den Halbkreis einen rechten Winkel zu verzeichnen. Allein der Grund der Unschicklichkeit der Aufgabenform liegt hier nicht darin, daß jeder Winkel im Halbkreis ein rechter ist; sondern darin, daß die Auflösung dieser Aufgabe an dem Orte, an welchem sie im Systeme der Geometrie stehen müßte, zu leicht ist, und sich von selbst ergibt. Denn, gleichwie in Euklid der Aufgabe (B. I. S. 22.), „aus dreyen geraden Linien, welche dreyen andern gegebenen gleich, so daß je zwey zusammen größer als die dritte sind, ein Dreyeck zu machen," der Lehrsatz (B. I. S. 20.), "daß in jedem Dreyeck jede zwey Seiten zusammen größer als die dritte sind" vorausgeht; so müßte auch im System der Geometrie der Aufgabe, „In den Halbkreis einen rechten Winkel zu verzeichnen," der Lehrsatz vorangehen, „daß jeder Winkel im Halbkreis ein rechter ist." Wenn aber dieser Lehrsatz vorausgeht, so ist die Verzeichnung eines rechten Winkels im Halbkreis so leicht und unmittelbar sich daraus ergebend, daß sie höchstens nur als Zusatz (der keines neuen Beweises bedarf) hinzugefügt zu werden braucht, am schicklichsten aber mit keiner Sylbe erwähnt wird. Wäre nähmlich, auf jenen Lehrsatz folgend, die Aufgabe gestellt, „In den Halbkreis einen rechten Winkel zu verzeichnen"; so wäre die Auflösung ganz kurz diese: „man nehme auf der Peripherie des gegebenen Halbkreises einen beliebigen Punkt an, und verbinde denselben durch gerade Linien mit den Endpunkten des Durchmessers, auf welchem der Halbkreis steht; so ist der Winkel, den beyde gerade Linien ein-

sind diejenigen, welche eine allgemeine und der ganzen Gattung zukommende Eigenschaft enthalten, als Lehrsätze auszusprechen; was aber weder allgemein gilt, noch von dem vorliegenden Dinge durchaus unzertrennlich ist, das ist als Aufgabe zu setzen. Eine gegebene begränzte gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen (denn auch in ungleiche Theile ist möglich); einen jeden von geraden Linien gebildeten Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen (denn es findet auch eine Theilung in ungleiche Theile Statt); über einer gegebenen geraden Linie ein Quadrat zu beschreiben (denn es läßt sich auch eine Figur beschreiben, die kein Quadrat ist); alles dergleichen gehört in die Classe der Aufgaben. Die Anhänger des Xenodotus, der zwar mit der Lehre des Oenopides vertraut, aber ein Schüler des Andron war, unterschieden den Lehrsatz von der Aufgabe also: wie der Lehrsatz untersucht, welches die Eigenschaft sey, die von einem Stoffe ausgesagt wird, so untersucht die Aufgabe, welchem Stoffe eine gewisse Eigenschaft zukomme (τινος 'οντος τι 'εστιν, zu welchem Seyn ein Seyn gehört). Daher auch die Schüler des Posidonius den Lehrsatz als einen Satz erklärten, in welchem untersucht wird, ob etwas ist oder nicht, die Aufgabe aber als einen Satz, in welchem untersucht wird, was ist, oder wie es ist*). Auch sagten sie, müsse der betrachtende

---

schließen, der gesuchte rechte Winkel". Und dann wäre der Beweis ebenfalls ganz kurz: „Dieser Winkel ist ein Winkel im Halbkreis; nun ist, nach dem vorhergehenden Lehrsatz, ein jeder Winkel im Halbkreis ein rechter Winkel; also ist dieser Winkel ein rechter." Wer möchte diese leichte und unfruchtbare Aufgabe mit Auflösung und Beweis aus dem System der Geometrie nicht gerne ausgeschlossen lassen?

*) Diese Unterscheidung des Posidonius ist nicht sehr klar; oder vielmehr durch das, was Posidonius sagt, sind Aufgabe und Lehrsatz gar nicht von einander unterschieden. Denn wenn ich untersuche, was ist, so finde ich auch, ob es ist oder nicht. Vielleicht aber hat gerade Posidonius die Sache am besten getroffen. Denn der Unterschied zwischen Aufgabe und Lehrsatz liegt bloß in der Form, der Sache nach sind sie gar nicht von einander

(theoretische) Satz die behauptende Form haben, wie: Ein jedes Dreyeck hat zwey Seiten größer als die dritte, und: In jedem gleichschenkligen Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. Der aufgebende (problematische) Satz aber müsse den fragenden Sätzen gleichen, Ob es möglich ist, auf der vorliegenden geraden Linie ein Dreyeck zu verzeichnen. Denn es sey ein Unterschied, im Allgemeinen und unbestimmt zu untersuchen, ob es ein Perpendikel von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene gerade Linie gebe, und zu betrachten, welches das Perpendikel sey. Aus dem Bisherigen ist wenigstens offenbar, daß zwischen der Aufgabe und dem Lehrsatze ein Unterschied ist *). Daß aber auch die Elemente des Euklid

---

unterschieden; und sehr gut bemerkt sogleich Posidonius weiter, daß den Lehrsätzen die behauptende und den Aufgaben die fragende Form zukommen müsse. Am Ende besteht der ganze Unterschied zwischen Aufgabe und Lehrsatz darin, daß jene in der fragenden, und dieser in der behauptenden Form augedrückt ist, daß wir einen jeden Satz nach Willkühr in der Form einer Aufgabe, oder in der Form eines Lehrsatzes vortragen können, und daß er sich nur in der einen Form besser und geschmeidiger ausnimmt, als in der andern. Davon weiter unten noch mehr. — Barocius hat den Satz also: „Unde Posidonii sectatores Theorema quidem Propositionem definierunt, per quam quaeritur sit nec ne: Problema vero, Propositionem, in qua quaeritur quid est, vel quale quid est. In der Griechischen Ausgabe, die auch Hauber benutzt hat, steht das Wort Theorema nicht. Hauber schaltet dafür das Wort πρόβλημα ein, und verwandelt das bald darauf folgende Wort πρόβλημα in θεώρημα. Bey den besseren Quellen, welche Barocius benutzt hat, glaubte ich seiner genauen Lateinischen Uebersetzung folgen zu müssen. Mag nun der verdienstvolle Hauber Recht haben oder nicht, so erhellt wenigstens das daraus, was ich im Anfang der Note sagte, daß die Unterscheidung des Posidonius, wie sie Proklus mittheilt, nicht sehr klar ist.

*) Der Unterschied in der Form wenigstens läßt sich nicht läugnen.

theils Aufgaben, theils Lehrsätze enthalten, wird aus den einzelnen Sätzen erhellen, da auch er am Ende eines jeden Beweises bald „was zu machen war" (ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, quod fecisse oportuit, wie es Zambertus übersetzt), bald „was zu beweisen war" (ὅπερ ἔδει δεῖξαι, quod oportuit demonstrasse nach Zambertus, oder das bekannte q. e. d.) hinzufügte; so daß „was zu machen war" das Kennzeichen der Aufgabe, und „was zu beweisen war" das Kennzeichen der Lehrsätze ist. Es findet nämlich auch, nach dem was wir gesagt haben, bey den Aufgaben ein Beweis Statt; doch ist hier der Beweis theils der Verfertigung wegen (damit wir nämlich zeigen, daß das Aufgegebene wirklich gemacht worden sey, nehmen wir den Beweis zu Hülfe), theils seiner selbst wegen der Beachtung werth, indem er die Natur des Gesuchten vor Augen legen kann. Man wird aber finden, daß Euklid bald die Lehrsätze mit Aufgaben durchwebt und dieselben unter einander gebraucht, wie in dem ersten Buche; bald aber sich der einen vorzugsweise vor der andern bedient. Denn das vierte Buch enthält lauter Aufgaben, das fünfte aber lauter Lehrsätze. So viel sey von uns über diesen Gegenstand gesagt."

Zweyte Stelle des Proklus, nämlich: über den Unterschied zwischen Axiom und Postulat*). „Sie (die Grundsätze und Forderungen) unterscheiden sich aber auf dieselbe Weise von einander, wie die Lehrsätze von den Aufgaben unterschieden worden sind. Denn wie wir in den Lehrsätzen verlangen, das, was aus den Annahmen gefolgert wird, einzusehen und zu erkennen, in den Aufgaben aber von uns verlangt wird, etwas zu erfinden und zu machen: auf dieselbe Weise wird auch in den Grundsätzen das angenommen, was sich der Erkenntniß von selbst aufdringt, und unserer Einsicht leicht ist, ohne daß wir es gelehrt worden sind; in den Forderungen aber

*) Proclus Hervagii S. 50 und 51; Barocius S. 102—105; Hauber S. 119 — 122.

verlangen wir das anzunehmen, was leicht zu machen und auszuführen ist, indem sich der Verstand über der Annahme desselben nicht abmühen muß, und das auch keiner Umschreibung noch Vorbereitung (κατασκευη, Construction) bedarf. Erkenntniß (γνωσις) nämlich, die offenbar und unbeweisbar ist, und Annahme (ληψις), die nicht vorbereitet wird, unterscheiden die Grundsätze und Forderungen; gleichwie auch beweisbare Erkenntniß und Annahme des Gesuchten mit Vorbereitung das unterscheidende Kennzeichen für Lehrsätze und Aufgaben sind." — [Nun kommt Proklus wieder darauf zurück, daß die Prinzipien vor den daraus abgeleiteten Sätzen den Vorzug haben, daß sie keines Beweises bedürfen; theilt mit, was Speusippus darüber sagt; wiederholt die bereits mitgetheilte Unterscheidung zwischen Axiom und Postulat, uur mit andern Worten; führt die Meinung Einiger an, welche beyderley Sätze mit dem gemeinschaftlichen Nahmen 'αιτηματα belegen *); und die Meinung Anderer, welche Alles 'αξιωματα nennen; und fährt dann so fort:] Gleichwohl ist, wie die Aufgabe vom Lehrsatze, so die Forderung vom Grundsatze verschieden, obgleich beyde unbeweisbar sind; die eine wird als leicht zu machen ('ευποριστον; factu facile, übersetzt Barocius) angenommen, und der andere als leicht zu erkennen zugestanden. Auf diese Art unterscheidet Geminus die Forderungen von den Grundsätzen **). Andere aber könnten vielleicht sagen, daß jene (die Forderungen) der geometrischen Materie eigenthümlich, diese

---

*) „Selbst Archimedes fängt seine Schrift vom Gleichgewichte also an: Wir fordern ('αιτουμεθα), daß gleich schwere Körper an gleichen Längen im Gleichgewicht seyen; obgleich man solches lieber einen Grundsatz nennen möchte."

**) Proklus führt im Ganzen dreyerley Meinungen an, wie die Axiome von den Postulaten verschieden seyen. Was bisher mitgetheilt worden, ist die erste; sie rührt vom Geminus her. Nunmehr folgt die zweyte; und die dritte endlich ist die bereits oben erwähnte von Aristoteles.

aber einer jeden Betrachtung über Größen jeglicher Art (*περι το ποσον και ποικιλον*; circa Quantum et Quotum, übersetzt Barocius) gemeinschaftlich wären. Denn das Eine, daß die rechten Winkel gleich seyen, und, Eine jede begränzte gerade Linie zu verlängern, gehört zu den Kenntnissen des Geometers: das Andere aber, Daß, was demselben gleich ist, auch unter einander gleich sey, ist eine allgemeine Kenntniß; auch der Arithmetiker bedient sich derselben, und ein jeder, der eine Wissenschaft betreibt, und seiner Materie das (allen Wissenschaften) Gemeinschaftliche aneignet. Aristoteles aber, wie wir schon oben angeführt haben, sagt, eine Forderung werde, wenn sie auch beweisbar und von dem Hörenden nicht zugestanden worden sey, gleichwohl als Principium angenommen; der Grundsatz aber sey unbeweisbar, indem er sich auf sich selbst gründe, und alle geständen ihn wohl, der Anlage ihres Verstandes gemäß, ein, wenn auch Einige, des Disputirens wegen, dagegen stritten. Da demnach dieser Unterschiedsbestimmungen drey sind, so ist nach der ersten, welche nur durchs Machen und Erkennen die Forderung vom Grundsatz unterscheidet, offenbar, daß der Satz, Alle rechte Winkel seyen einander gleich, keine Forderung ist; eben so wenig die fünfte (Forderung), Daß, wenn auf zwey gerade Linien eine gerade Linie fällt, und die innern Winkel auf derselben Seite kleiner als zwey rechte macht, die geraden Linien verlängert auf der Seite zusammen fallen, wo die Winkel kleiner als zwey rechte sind. Denn diese beyden Sätze werden weder einer Construction unterworfen, noch verlangen sie, daß etwas gethan werde, sondern sie zeigen eine Eigenschaft, welche den rechten Winkeln zukommt, und den geraden Linien, die von kleineren Winkeln, als zwey rechten, ausgehen. Nach der zweyten Bestimmung aber ist der Satz kein Grundsatz, Daß zwey gerade Linien keinen Raum einschließen; welchen gegenwärtig Einige als Axiom hinzufügen *). Denn dieser ist der geometrischen Materie eigenthüm-

---

*) ὁ και νυν τινες ὡς ἀξιωμα προςγραφουσι. War es

lich, wie der, Daß alle rechte Winkel einander gleich seyen. Nach der dritten Bestimmung endlich, nach der des Aristo-

---

also Euklid nicht selbst, der diesen Satz unter den κοιναις 'εννοιαις aufgeführt hat? — Proklus hätte also, wenn man diesen Satz wieder ausstreicht (da er das 8te Axiom der Lorenzischen Uebersetzung nicht hat, und das 10te und 11te unter die 'αιτηματα zählt) unter den κοιναις 'εννοιαις wirklich bloß solche Sätze, die allen Wissenschaften gemeinschaftlich angehören, und der Geometrie nicht eigenthümlich sind. Ueber diese paßt dann die Ueberschrift: κοιναι 'εννοιαι, d. i. allgemeine Erkenntnisse. Auch paßt dann auf diese Sätze der Begriff von Grundsatz, sowohl nach der obigen zweyten, als auch nach der dritten Aristotelischen Unterschieds-Bestimmung; nach der ersten paßt er ohnehin. Nur muß bemerkt werden, daß die Uebersetzung des Barocius das achte Axiom der Lorenzischen Uebersetzung hat, und daß auch im Texte des Commentars dessen Erwähnung geschieht, wiewohl nicht von der Art, daß sich daraus beweisen ließe, Euklid selbst habe den Satz: „Dinge, die einander decken, sind einander gleich" unter seinen κοιναις ἐννοιαις ausgesprochen. Proklus führt nämlich diesen Satz nur an, um gegen Heron darzuthun, daß es mehr als drey Axiome gebe. Auffallend ist es dabey (vgl. Hauber a. a. O. S. 131), daß er denselben als der geometrischen Materie nicht eigenthümlich ansieht. Als Grund, daß der Satz „Dinge, die einander decken, sind einander gleich" unter den Prinzipien aufgeführt werden müsse, gibt Proklus den an, daß Euklid von diesem Satze in der vierten Proposition des ersten Buches Anwendung mache. Allein, wir dürfen daraus keineswegs den Schluß ziehen, daß Euklid selbst diesen Satz unter den Prinzipien namentlich aufgenommen habe. Denn er macht z. B. auch von dem Grundsatze Anwendung: „Von zwey gleichen Dingen kann man, der Größe unbeschadet, eins für das andere setzen" (so macht er im Beweis von I. 18. den Schluß: da W. ABD = ADB (Fig. 1.) und W. ADB > ACB ist, so ist auch W. ABD > ACB); und dennoch findet sich der Grundsatz bey ihm unter den Prinzipien nicht aufgeführt. — Man erlaube mir bey dieser Gelegenheit den Zweifel

teles, werden alle Sätze, welche durch eine Art von Beweis für wahr gehalten werden, Forderungen seyn; was aber unbeweisbar ist, sind Grundsätze."

Dritte Stelle des Proklus, nämlich: über die Theile, aus welchen wieder die Aufgaben und Lehrsätze zusammen gesetzt sind*). „Eine jede Aufgabe und ein

---

oder die Frage: Hat überhaupt Euklid selbst die κοινας ἐννοιας seinen Propositionen vorgesetzt, oder sind dieselben eine Zugabe Anderer? — Sehr gründlich wenigstens hätte Euklid dabey nicht verfahren. Schon Proklus hat mancherley daran auszusetzen; und in andern mathematischen Schriften (z. B. von Archimed und Apollonius) finden wir nur ὑποϑεσεις und ἀιτηματα, aber nichts von κοιναις ἐννοιαις. Diese sind allgemeine Sätze, die der Mathematiker in seiner Wissenschaft so gut gebrauchen kann, wie jeder andere in der seinigen, ohne daß er sie namentlich aufzuzählen braucht.

*) Procl. Herv. S. 56 — 58; Barocius S. 116 — 120; Hauber S. 166 ff. — Ehe Proklus zu den verschiedenen Theilen der Aufgaben und Lehrsätze übergeht, so gibt er, obgleich er früher (Siehe S. 55) schon mehrere Unterschieds-Bestimmungen zwischen Aufgabe und Lehrsatz mitgetheilt hat, noch einmal einen solchen Unterschied an, ohne Zweifel nach Geminus. „Aufgaben" sagt er, „nennt sie (die Wissenschaft) diejenigen, in welchen sie aufgibt, was noch nicht ist, zu machen, an's Licht zu bringen und zu erfinden; Lehrsätze aber diejenigen, in welchen sie vornimmt, das Seyn oder Nichtseyn einzusehen, zu erkennen und zu beweisen." Dieß ist mithin der Unterschied zwischen Aufgabe und Lehrsatz, für welchen sich Proklus selbst entscheidet. Es ist zugleich derjenige, der jetzt unter den Mathematikern allgemein ist. („Aufgaben sind practische Sätze, wodurch die Verrichtung einer gewissen Handlung gefordert wird, deren Möglichkeit nicht unmittelbar aus dem Begriffe der Handlung selbst fließt, sondern erst aus andern für sich offenbaren oder schon erwiesenen Sätzen hergeleitet werden muß. Lehrsätze sind theoretische Sätze, deren Wahrheit nicht für sich unmittelbar nothwendig anerkannt, sondern erst aus andern für sich offenbaren oder schon erwiesenen Sätzen gefolgert werden

jeder Lehrsatz, die mit ihren vollständigen Theilen erfüllt sind, sollen alles dieses in sich enthalten: Die Proposition (προτασις), Exposition ('εκθεσις), Determination (διορισμος), Construction (κατασκευη), Demonstration ('αποδειξις), und Conclusion (συμπερασμα)*). Unter

---

muß." Langsdorf's Anfangsgründe S. 8. — „Propositio theoretica ex pluribus definitionibus inter se collatis eruta Theorema appellatur." — „Problemata facienda proponunt." Wolfii Elementa etc. Tom. I. p. 12 und 15. — U. s. w.)

*) Diese Unterscheidung von sechs Theilen paßt vorzüglich auf die Lehrsätze; für die Aufgaben möchte sie sich so und in dieser Reihenfolge schwerlich durchführen lassen. Ich füge in der Note einige Beyspiele bey.

1) Beyspiel eines Lehrsatzes mit directem Beweise, Euklids 18ter Satz des ersten Buches. Eucl. Herv. p. 9; vgl. Hauber a.a. O. S. 156).

Proposition. In jedem Dreyeck liegt der größern Seite der größere Winkel gegen über.

Exposition. Das Dreyeck sey ABC (Fig. 1.), welches die Seite AC größer als die AB habe.

Determination. So sage ich, daß auch der Winkel ABC größer als der Winkel BCA ist.

Construction. Denn da die AC größer als die AB ist, so werde der AB gleich die AD auf die AC gelegt, und die BD gezogen.

Demonstration. Da der Winkel ADB außerhalb des Dreyecks BDC ist, so ist er größer als der innere gegen über stehende DCB. Es ist aber der ADB dem ABD gleich, da auch die Seite AB der AD gleich ist. Also ist auch der ABD größer als der ABC. Also noch mehr der ABC größer als der ACB.

Conclusion. In jedem Dreyeck liegt also der größeren Seite der größere Winkel gegen über. Was zu beweisen war.

2) Beispiel eines Lehrsatzes mit indirectem Beweise, Euklids 19ter Satz des ersten Buches (vgl. Hauber a. a. O. S. 157).

Proposition. In jedem Dreyeck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegen über.

diesen aber spricht die Proposition aus, was zu dem Gegebe-nen das Gesuchte ist. Denn eine vollständige Proposition be-

---

Exposition. Das Dreyeck sey ABC (Fig. 1), welches den Winkel ABC größer als den Winkel BCA habe.

Determination. So sage ich, daß auch die Seite AC größer als die Seite AB ist.

(Einer Construction bedarf es in diesem Beweise nicht).

Demonstration. Denn, wenn nicht; so ist die AC der AB entweder gleich oder größer als dieselbe.

Nun ist aber die AC der AB nicht gleich. Denn wenn sie gleich wäre, so wäre auch der Winkel ABC dem ACB gleich. Er ist es aber nicht. Folglich ist die AC der AB nicht gleich.

Die AC ist aber auch nicht kleiner als die AB. Denn wenn sie kleiner wäre, so wäre auch der Winkel ABC kleiner als der ACB. Er ist es aber nicht. Folglich ist die AC nicht kleiner als die AB.

Es wurde aber bewiesen, daß sie ihr auch nicht gleich ist. Folglich ist die AC größer als die AB.

Conclusion. In jedem Dreyeck liegt also dem größeren Winkel die größere Seite gegen über. Was zu beweisen war.

3) Beyspiel einer Aufgabe, Euklids erster Satz des ersten Buches (Eucl. Herv. p. 3) Die Abtheilung ist gerade so gemacht, wie sie Proklus selbst angibt. (Vgl. Hauber a. a. O. S. 141).

Proposition. Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben.

Exposition. Die gegebene begränzte gerade Linie sey die AB (Fig. 2).

Determination. So soll man auf der geraden AB ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben.

Constrution. Aus dem Mittelpunkte A werde mit dem Abstand AB der Kreis BCD beschrieben; eben so werde aus dem Mittelpunkte B mit dem Abstande BA der Kreis ACE beschrieben. Und von dem Punkte C, in welchem die Kreise einander schneiden, werden nach den Punkten A, B die geraden Linien CA, CB gezogen.

Demonstration. Da der Punkt A der Mittelpunkt des

steht aus beyden. Die Exposition aber nimmt das durch sich selbst Gegebene auf, und bereitet so die Untersuchung vor;

Kreises CDB ist, so ist die AC der AB gleich. Eben so, da der Punkt B der Mittelpunkt des Kreises CAE ist, so ist die BC der BA gleich. Es ist aber auch gezeigt worden, daß die CA der AB gleich ist. Also ist eine jede der beyden CA, CB der AB gleich. Was aber demselben gleich ist, ist auch unter sich gleich. Also ist auch die CA der CB gleich. Also sind die drey CA, AB, BC unter einander gleich.

Conclusion. Also ist das Dreyeck ABC gleichseitig; und wurde auf der gegebenen begränzten geraden Linie AB beschrieben. Was zu machen war.

4) Anderes Beyspiel einer Aufgabe, Euklids 9ter Satz des ersten Buches (Eucl. Herv. S. 6.). In dieser Aufgabe kommt noch, wie es Hauber (S. 149.) nennt, ein διορισμος της κατασκευης, eine Determination der Construction, hinzu. Eigentlich läßt sich dieselbe bey jeder Aufgabe aussprechen. In obigem ersten Satz Euklids müßte sie so heißen: „So sage ich, daß ABC ein über der gegebenen Linie AB beschriebenes gleichseitiges Dreyeck sey" (Vgl. Savilius S. 169; Hauber S. 171.) Es ist eine Mangelhaftigkeit der Form, wenn sie bey der Aufgabe fehlt; sie kann nur in sofern wegbleiben, als sie sich leicht hinzu denken läßt. Wir sehen also, daß, wie oben gesagt wurde, die Abtheilung in sechs Theile auf die Form der Aufgabe, nicht so anwendbar ist.

Proposition. Einen gegebenen geradlinigen Winkel in zwey Theile zu theilen.

Exposition. Es sey BAC der gegebene geradlinige Winkel (Fig. 3.).

Determination. So soll man denselben in zwey gleiche Theile theilen.

Construction. Es werde auf der AB willkührlich der Punkt D angenommen, und von der AC der AD gleich die AE abgeschnitten; und es werde die DE gezogen. Und auf der DE werde das gleichseitige Dreyeck DEF beschrieben, und die AF gezogen.

Determination der Construction. So sage ich, daß der Winkel BAC durch die gerade AF in zwey gleiche Theile getheilt sey.

die Determination erklärt insbesondere, welches das Gesuchte ist; die Construction fügt das dem Gegebenen zur Verfolgung des Gesuchten noch Fehlende hinzu; die Demonstration aber

---

Demonstration. Denn da die AD der AE gleich und die AF gemeinschaftlich ist, so sind die zwey DA, AF den zweyen EA, AF, eine jede einer jeden, gleich; und die Basis DF ist der Basis EF gleich. Also ist der Winkel DAF dem Winkel EAF gleich.

Conclusion. Also ist der gegebene geradlinige Winkel BAC durch die gerade Linie AF in zwey gleiche Theile getheilt. Was zu machen war.

5) Noch ein Beyspiel einer Aufgabe, Euklids 30ster Satz des dritten Buchs (Eucl. Herv. p. 41), um zu zeigen, daß eine vollständige Aufgabe, in der alle Theile vorkommen, der Theile, wie sie Proklus unterscheidet, eigentlich acht enthalte. Um ihnen keine Namen zu geben, unterscheide ich sie blos durch a, b, c u. s. w.

a) Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren.

b) Es sey ADB der gegebene Kreisbogen (Fig. 4.)

c) So soll man den Bogen ADB halbiren.

d) Es werde die AB gezogen, und in C halbirt; und aus dem Punkt C werde auf die gerade AB das Perpendikel CD errichtet.

e) [So sage ich, daß der Bogen AD dem Bogen BD gleich ist.]

f) Es werden die AD und BD gezogen.

g) Da die AC der BC gleich und die CD gemeinschaftlich ist, also die zwey AC, CD den zweyen BC, CD gleich sind, und der Winkel ACD dem Winkel BCD gleich ist; denn jeder ist ein rechter: so ist auch die Basis AD der Basis DB gleich. Gleiche gerade Linien aber schneiden Bögen ab, von denen der größere dem größeren, der kleinere dem kleineren gleich ist, und jeder der Bögen AD, DB ist kleiner als der Halbkreis; also ist der Bogen AD dem Bogen DB gleich.

h) Der gegebene Kreisbogen ist also halbirt worden. Was zu machen war.

schließt nach wissenschaftlichen Regeln aus dem Zugestandenen die vorliegende Wahrheit; die Conclusion endlich kehrt zur Proposition zurück, indem sie das, was bewiesen worden ist, bestätigt. Und dieses sind alle Theile der Aufgaben und Lehrsätze; die nothwendigsten aber, und die in allen vorkommen, sind die Proposition, Demonstration und Conclusion; denn man muß nicht nur das Gesuchte vorher wissen, sondern es auch durch Zwischensätze beweisen, und das Bewiesene als Schluß folgern; und daß einer von diesen dreyen fehle, ist unmöglich. Die übrigen aber werden an vielen Orten aufgenommen, an vielen andern Orten aber, da sie keinen Nutzen gewähren, ausgelassen. Denn eine Determination und Exposition finden in jener Aufgabe nicht Statt, Ein gleichschenkliges Dreyeck zu beschreiben, das einen jeden der beyden Winkel an der Grundlinie doppelt so groß als den übrigen habe. (Eukl. IV. 10.) Eine Construction aber findet in sehr vielen Lehrsätzen dann nicht Statt,*) wenn die Exposition hinreicht, ohne andern Zusatz aus dem Gegebenen den vorgelegten Satz zu beweisen. Wann aber sagen wir, daß die Exposition fehle? Wenn in der Proposition kein Gegebenes ist. Wenn gleich die Proposition in das Gegebene und das Gesuchte zerfällt, so geschieht dieß doch nicht immer; sondern manchmal spricht sie nur das Gesuchte aus, welches zu erkennen oder zu machen ist, wie in der genannten Aufgabe. Denn sie sagt nicht vor, bey welchem Gegebenen ein gleichschenkliges Dreyeck beschrieben werden soll, das einen jeden der beyden gleichen Winkel doppelt so groß als den übrigen habe, sondern, daß ein solches gemacht werden solle. Es geschieht zwar auch hier aus vorher erkannten Sätzen die Erlangung des Vorgesetzten — —; gleichwohl wird uns nichts untergelegt, wie in andern Aufgaben, wie wenn eine solche sagt, Eine gegebene begränzte gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen. Denn hier ist die gerade Linie

*) Z. B. in dem Lehrsatz, daß die Scheitelwinkel einander gleich sind. (Eukl. I. 15.)

gegeben, verlangt aber wird von uns, sie in zwey gleiche Theile zu theilen; nnd es wird bestimmt, was das Gegebene insbesondere, und was das Gesuchte ist. Wenn daher die Proposition beydes hat, dann wird auch eine Determination und Exposition gefunden; wenn aber das Gegebene fehlt, so fehlen auch diese: denn die Exposition und Determination gehören zum Gegebenen. Diese nämlich (die Determination) wird mit der Proposition gleichlautend seyn. Denn was könnte man bey der Determination der genannten Aufgabe Anderes sagen, als daß man ein solches gleichschenkliges Dreyeck finden solle? So lautete aber die Aufgabe selbst. Wenn also die Proposition das Gegebene nicht hat, sondern nur das Gesuchte, so wird einmal die Exposition verschwiegen, weil nichts Gegebenes da ist; dann wird aber auch die Determination ausgelassen, damit sie mit der Proposition nicht einerley werde. — — — — Die Conclusion pflegt man auf doppelte Art zu machen. Denn da man als an dem Gegebenen den Beweis führt, so schließt man als allgemein, indem man von der besonderen Conclusion zu der allgemeinen übergeht. Denn weil man von der Eigenthümlichkeit der vorliegenden Figuren keinen Gebrauch macht, sondern nur um das Gegebene vor Augen zu legen, den Winkel oder die gerade Linie verzeichnet, so hält man dafür, daß dasjenige, was an dieser gefolgert werde, auch an jeder derselben Art geschlossen worden sey. Man geht also zum Allgemeinen über, damit wir nicht wähnen, daß der Schluß nur ein besonderer sey. Man geht aber mit guten Gründen über, da man sich der verzeichneten Figuren nicht, insofern sie diese sind, sondern insofern sie mit den andern von gleicher Art sind, zu dem Beweise bedient. Denn nicht insofern der vorliegende Winkel so groß ist, machen wir die Halbirung, sondern nur insofern er geradlinig ist. Es ist zwar die Größe dem vorliegenden eigenthümlich, das Geradlinige aber ist allen geradlinigen gemein. Denn es sey der gegebene Winkel ein rechter; wenn ich nun zum Beweise die Rechtwinkligkeit nehmen wollte, so könnte ich nicht zu jeder Art des geradlinigen

Winkels übergehen; wenn ich aber das Rechtwinklige desselben nicht hinzufüge, sondern nur das Geradlinige betrachte, so wird auf gleiche Weise das Gesagte auch auf alle geradlinigen Winkel passen. Alles dieses aber, was wir gesagt haben, wollen wir an dieser ersten Aufgabe betrachten. Denn daß es eine Aufgabe sey, ist klar; sie verlangt nämlich von uns, die Verfertigung eines gleichseitigen Dreyecks zu ersinnen. Es besteht aber in derselben die Proposition aus dem Gegebenen und dem Gesuchten. Gegeben *) wird nämlich eine begränzte gerade Linie; gesucht aber wird, wie auf derselben das gleichseitige Dreyeck errichtet werde. — Nach der Proposition folgt die Exposition: Die gegebene begränzte gerade Linie sey diese. Auch sieht man, daß die Exposition das Gegebene allein ausspricht, und das Gesuchte nicht hinzufügt. Nach dieser ferner die Determination: Man soll auf der vorgelegten geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben. Gewissermaßen ist die Determination der Aufmerksamkeit wegen da; sie macht uns nämlich aufmerksamer auf den Beweis, indem sie das Gesuchte ausspricht, wie die Exposition uns das Verstehen erleichtert, indem sie uns das Gegebene vor Augen legt. Auf die Determination aber folgt die Construction: Aus dem einen Ende der geraden Linie als Mittelpunkt werde mit dem übrigen Abstande ein Kreis beschrieben; und eben so werde aus dem andern Ende als Mittelpunkt mit dem vorigen Abstande ein Kreis beschrieben; und aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der Kreise werden an die Enden der geraden Linie gerade Linien gezogen. Auch sieht man, daß ich zu der Construction die Forderungen gebrauche, nämlich: Aus jedem Punkt eine gerade Linie zu ziehen, und Aus jedem Mittelpunkte in jedem Abstande einen Kreis zu beschreiben. Im Allgemeinen nämlich dienen die Forderungen zu den Constructionen und die Grundsätze zu den Demonstrationen. Es folgt nun

*) „Data dicuntur etiam hypotheses quaestionis; et sunt praemissae positae et praeconcessae, ex quibus infertur conclusio.“ Savilius. p. 163. Siehe Hauber S. 169.

die Demonstration: Da der eine der beyden Punkte an der gegebenen geraden Linie der Mittelpunkt des ihn umgebenden Kreises ist, so ist die nach dem gemeinschaftlichen Durchschnitt gezogene der gegebenen geraden Linie gleich. Eben so, da der andere der beyden Punkte an der gegebenen des ihn umgebenden Kreises Mittelpunkt ist, so ist die nach dem gemeinschaftlichen Durchschnitt gezogene der gegebenen geraden Linie gleich. Und die Anführung dieser Sätze geschieht vermöge der Definition (ὁρισμος) des Kreises, welche sagte, daß alle Linien aus dem Mittelpunkte gleich seyen. Beyde Linien sind also derselben (dritten) gleich. Was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich, nach dem Grundsatz. Also sind die drey einander gleich. Auf dieser geraden Linie ist also ein gleichseitiges Dreyeck beschrieben. Dieses ist die erste Conclusion, welche der Exposition entspricht; darauf aber sagt die (zweyte) allgemeine: Auf der gegebenen geraden Linie ist also ein gleichseitiges Dreyeck beschrieben. Man könnte nämlich die gegebene Linie auch doppelt so groß als die nun vorgelegte machen, es passen doch die nämlichen Constructionen und Demonstrationen; auch könnte man die dreyfache und irgend eine andere größere oder kleinere Linie annehmen. Diesem setzte er aber das „Was zu machen war" hinzu, um zu zeigen, daß es die Conclusion einer Aufgabe war."

So viel aus Proklus über die verschiedenen Sätze in der Geometrie. Es ergibt sich daraus hinlänglich, daß die Form der geometrischen Darstellung den Alten eine nicht unwichtige Angelegenheit war, zugleich aber auch, daß sie über das Einzelne hierher Gehörige sehr verschiedene Ansichten hatten. Noch jetzt ist es Sache des Lehrers der Mathematik, sich um die verschiedenen Ansichten über das Allgemeine und Besondere der Form der geometrischen Darstellung zu bekümmern, und sich über die Anwendung, die er hiervon bey seinem Unterrichte zu machen gedenkt, eine bestimmte und klare Ansicht zu bilden. Ohne mich hier auf weitere Berücksichtigung anderer Ansichten einzulassen, spreche ich nachfolgend die meinige, (die ich mich bemüht habe,

aus Euklids Elementen zu schöpfen, und denselben möglichst anzupassen) in so weit aus, als ich zu dem Zwecke meiner Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze bedarf.

Ueber das Verhältniß des Lehrsatzes und der Aufgabe zum System der Geometrie; und über die daraus sich ergebende Form für beyde.

Wenn wir aus einem wohl geordneten Lehrgebäude der Geometrie irgend einen Lehrsatz herausnehmen, z. B. aus Euklids Elementen den 18ten Satz des ersten Buches;*) so ergeben sich für denselben sogleich zwey Haupttheile. Der erste Haupttheil ist die Aussprache des Lehrsatzes: „In jedem Dreyeck liegt der größern Seite der größere Winkel gegen über;„ der zweyte Haupttheil ist die Begründung des in dem ersten Haupttheil ausgesprochenen Satzes. Der erste Haupttheil ist das, was die Alten die Proposition (πρότασις) nannten; der zweyte Haupttheil umfaßt die 5 übrigen der sechs Theile, worin die Alten den Lehrsatz zerlegten, nämlich: die Exposition, Determination, Construction, Demonstration und Conclusion. Sehr gut gebrauchen die Neuern dafür nur einen gemeinschaftlichen Namen, den des Beweises. Die zwey Haupttheile eines jeden Lehrsatzes also sind: die Proposition und der Beweis.

Das Verhältniß der Proposition eines Lehrsatzes zum System der Geometrie und das Verhältniß seines Beweises zum System der Geometrie sind wesentlich verschieden. Die Proposition, die immer nur aus Einem Satze besteht (wenigstens jedesmal in einen einzigen Satz zusammen gezogen werden kann) dient für im System später zu machende Schlüsse als Obersatz, (wenigstens kann sie dazu dienen; und Falls sie

---

*) Man findet denselben oben Seite 62 in der Note übersetzt. Nur sind die Namen für die einzelnen Theile des Lehrsatzes nach Proklus hinzugefügt worden.

in einem bestimmten Systeme nicht dazu gebraucht wird, so kann ohne Nachtheil des Systems der ganze Lehrsatz ausgelassen werden); umgekehrt steht sie mit allen früheren Sätzen des Systems in so fern in gar keinem logischen Zusammenhange, als sie nicht in der Form eines Schlußsatzes aus früheren Sätzen, als Prämissen, dasteht. Der Beweis dagegen, der, wenn er vollständig gedacht wird, immer aus mehreren Sätzen (aus Vorder- und Schlußsätzen eines mittelbaren Schlusses oder Vernunftschlusses *)) zusammen gesetzt ist, steht mit keinem der im Systeme später folgenden Sätze im logischen Zusammenhange. Er enthält entweder einen Vernunftschluß, in welchem ein im System früher ausgesprochener und bereits als wahr anerkannter Satz (oder auch ein früher nicht ausgesprochener Grundsatz) der Obersatz ist; oder er enthält ein engeres System von Vernunftschlüssen, in welchen entweder solche im weiteren System des ganzen Lehrgebäudes früher ausgesprochene Sätze, oder die im Beweis selbst bereits abgeleiteten Schlußsätze die Vordersätze sind. Diese im Beweise selbst abgeleiteten Schlußsätze, von denen im Beweise selbst als Obersätzen Anwendung gemacht wird, werden aber in einem ordentlichen Lehrgebäude, von der Art, wie das Euklidische vor uns liegt, nie mehr (in den dem Lehrsatze unmittelbar beygefügten Zusätzen oder Corollarien ausgenommen) als bereits anerkannte Wahrheiten gebraucht; so daß, wie gesagt, der Beweis mit allen späteren Sätzen des Systems in keinem logischen Zusammenhang steht. Der Beweis eines Lehrsatzes kann, ohne daß eine Lücke in der geometrischen Erkenntniß entsteht, wieder vergessen werden **).

---

*) S. Fries System der Philosophie. 1804. S. 126. Man bemerke insbesondere noch den Satz: „Die unmittelbaren Schlüsse lassen sich alle als mittelbar vorstellen, wenn man die allgemeine Regel, nach der die Form der Sätze in ihnen zusammenhängt, zum Obersatz macht."

**) Der Mathematiker macht von tausend Sätzen, die er nicht ein-

Wir könnten uns ein System der Geometrie denken, das eine reine Zusammenstellung von lauter wohl geformten Vernunftschlüssen wäre. Diesen Satz zu erläutern, will ich, um die Anwendung auf directe und indirecte Beweise zugleich zu machen *), den 18ten und 19ten Satz aus Euklids erstem Buche, nach dem von uns gedachten Systeme umformen. Ich will die einzelnen auf einander folgenden Vernunftschlüsse durch p, q, r u. s. w. bezeichnen, und dadurch zugleich andeuten, daß das Beyspiel mitten aus dem Systeme herausgenommen ist, und daß sehr viele andere Vernunftschlüsse bereits vorausgehen.

(p) Obersatz. Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks sind einander gleich. (Oder: wenn ein Dreyeck zwey gleiche Seiten hat, so sind die den gleichen Seiten gegen über stehenden Winkel einander gleich. Dieß ist der Schlußsatz eines im Systeme früher vorgekommenen Vernunftschlusses).

Untersatz. Wenn man nun in einem Dreyeck, das zwey ungleiche Seiten hat, von der längeren Seite ein Stück abschneidet (oder sich abgeschnitten denkt) das der kürzeren

---

mal selbst hergeleitet hat, von deren Wahrheit er aber überzeugt ist, Anwendung, um darauf weiter zu bauen. So hält er z. B. den in den Tafeln stehenden Logarithmen einer Zahl für wahr, und gebraucht ihn, ohne ihn selbst berechnet zu haben.

*) Die Vernunftschlüsse, die man in den directen Beweisen anwendet, haben die Form:

Obersatz. Wenn A ist B, so C ist D.
Untersatz. Nun: A ist B.
Schlußsatz. Also: C ist D.

Die Vernunftschlüsse in den indirecten Beweisen haben die Form:

Obersatz. Wenn A ist B, so C ist D.
Untersatz. Nun: C ist nicht D.
Schlußsatz. Also: A ist nicht B.

Vgl. Hauber a. a. O. S. 214 (aus Savilius p. 230 ff.)

Seite gleich ist, und die Endpunkte der zwey jetzt gleichen Linien durch eine gerade Linie verbindet; so sind die Winkel an dieser Linie die beyden Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks. (Vermöge der Erklärung vom gleichschenkligen Dreyeck).

Schlußsatz. Wenn man also in einem Dreyeck — — —; so sind die Winkel an dieser Linie (nämlich die zu dem gleichschenkligen Dreyeck gehören) einander gleich.

(q) Obersatz. Der äußere Winkel eines Dreyecks ist größer als ein jeder der beyden innern gegen über stehenden. (Dieß ist wieder der Schlußsatz eines im Systeme früher vorgekommenen Vernunftschlusses).

Untersatz. Wenn man nun in einem Dreyeck, das zwey ungleiche Seiten hat, von der längeren Seite ein Stück abschneidet, das der kürzeren Seite gleich ist, und die Endpunkte der zwey jetzt gleichen Linien durch eine gerade Linie verbindet; so bildet diese gerade Linie mit dem Rest der längeren Seite und mit der dritten Seite des angenommenen Dreyecks wieder ein Dreyeck, an und in welchem der Winkel, den diese gerade Linie mit dem der kürzeren Seite des angenommenen Dreyecks gleich gemachten Stück der längeren Seite macht, der äußere, und der der kürzeren Seite des zuerst angenommenen Dreyecks in diesem Dreyeck gegen über liegende Winkel der eine der beyden innern gegen über stehenden Winkel ist (Erklärung).

Schlußs. Wenn man also in einem Dreyeck — — —; so ist der Winkel, den diese gerade Linie mit dem der kürzern Seite des angenommenen Dreyecks gleich gemachten Stück der längeren Seite macht, größer als der Winkel, welcher der kürzeren Seite des angenommenen Dreyecks gegen über liegt.

(r) Obers. Wenn eine Größe gleich einer zweyten ist, die größer als eine dritte ist, so ist die erste Größe auch größer als die dritte. (Dieser Satz ist ein Grundsatz).

Unters. Wenn man nun in einem Dreyeck — — —; so ist der Winkel, den diese gerade Linie mit der kürzeren

Seite macht (als erste Größe) dem Winkel, den diese gerade Linie mit dem der kürzern Seite des angenommenen Dreyecks gleich gemachten Stück der längeren Seite macht (als zweyter Größe) gleich (dieß ist der Schlußsatz des Vernunftschlusses p); und dieser Winkel (die zweyte Größe) ist größer als der Winkel, welcher der kürzeren Seite des angenommenen Dreyecks gegen über liegt (Dieß ist der Schlußsatz des Vernunftschlusses q).

Schlußs. Wenn man also in einem Dreyeck — — —; so ist der Winkel, den diese gerade Linie mit der kürzeren Seite des angenommenen Dreyecks macht, größer als der Winkel, welcher in dem angenommenen Dreyeck dieser kürzeren Seite gegen über liegt.

(s) Obers. Das Ganze ist größer als sein Theil (Grundsatz).

Unters. Wenn man nun in einem Dreyeck — — —; so ist der Winkel, den diese gerade Linie mit der kürzeren Seite des angenommenen Dreyecks macht, nur ein Theil des Winkels, welcher der längeren Seite des angenommenen Dreyecks gegen über liegt (Vermöge der Erklärung von Winkel und Größe des Winkels.)

Schlußs. Wenn man also in einem Dreyeck — — —; so ist der Winkel, welcher der längeren Seite des angenommenen Dreyecks gegen über liegt, größer als der Winkel, den die gezogene Linie mit der kürzeren Seite macht.

(t) Obers. Wenn eine erste Größe größer als eine zweyte, und eine zweyte Größe größer als eine dritte ist, so ist um so mehr die erste Größe größer als die dritte (Grundsatz).

Unters. Wenn man nun in einem Dreyeck — — —: so ist der Winkel, welcher der längeren Seite des angenommenen Dreyecks gegen über liegt (als erste Größe) größer als der Winkel, den die gezogene Linie mit der kürzeren Seite macht (als zweyte Größe) (Schlußs. s.); und dieser Winkel (die zweyte Größe) ist größer als der Winkel, welcher der

kürzeren Seite des angenommenen Dreyecks gegen über liegt (als dritter Größe) (Schlußs. r.).

Schlußs. Wenn also in einem Dreyeck eine Seite größer als eine andere ist, so ist der Winkel, der der größeren Seite gegen über liegt, größer als der Winkel, der der kleineren Seite gegen über liegt.

(u) Obers. Wenn eine Seite eines Dreyecks einer andern gleich ist, so ist der der ersten gegen über liegende Winkel dem der andern gegen über liegenden Winkel gleich. (Derselbe Obersatz wie p.)

Unters. Wenn nun in einem Dreyeck ein Winkel größer als ein anderer ist, so ist der zweyte Winkel dem ersten Winkel nicht gleich (Leichter Schlußsatz aus einem Grundsatz).

Schlußs. Wenn also in einem Dreyeck ein Winkel größer als ein anderer ist, so ist die Seite, welcher der zweyte Winkel gegen über liegt, der Seite, welcher der erste Winkel gegen über liegt, nicht gleich.

(v) Obers. Wenn in einem Dreyeck eine Seite größer als die andere ist, so ist der ihr gegen über liegende Winkel größer als der der andern gegen über liegende Winkel. (Dieß ist der Schlußsatz des im Systeme (unter t) vorgekommenen Vernunftschlusses).

Unters. Wenn nun in einem Dreyeck ein Winkel größer als ein anderer ist, so ist der zweyte Winkel nicht größer als der erste. (Leichter Schlußsatz aus einem Grundsatz.)

Schlußs. Wenn also in einem Dreyeck ein Winkel größer als ein anderer ist, so ist die Seite, welcher der zweyte Winkel gegen über liegt, nicht größer als die Seite, welcher der erste Winkel gegen über liegt.

(w) Obers. Wenn eine Größe einer andern nicht gleich und auch nicht größer als die andere ist, so ist sie kleiner als die andere (Grundsatz).

Unters. Wenn nun in einem Dreyeck ein Winkel größer als der andere ist, so ist die Seite, welcher der zweyte Winkel gegen über liegt, nicht gleich der Seite, welcher der erste

Winkel gegen über liegt (Schlußſ. u); und die Seite, welcher der zweyte Winkel gegen über liegt, iſt auch nicht größer als die Seite, welcher der erſte Winkel gegen über liegt (Schlußſ. v).

Schlußſ. Wenn alſo in einem Dreyeck ein Winkel größer als der andere iſt, ſo iſt die Seite, welcher der zweyte Winkel gegen über liegt, kleiner als die Seite, welcher der erſte Winkel gegen über liegt.

Es fällt hier ſogleich in die Augen, daß (etwaige Unachtſamkeitsfehler vorbehalten) dieſe Herleitung des Euklidiſchen 18ten und 19ten Satzes vollkommen und ſtreng richtig iſt. Den 18ten Satz ſpricht der Schlußſatz t und den 19ten Satz der Schlußſatz w aus. Die oben ausgeſprochene Behauptung, daß ſich ein Syſtem der Geometrie als eine reine Zuſammenſtellung von lauter wohl geformten Vernunftſchlüſſen denken laſſe, iſt alſo hiermit gerechtfertigt. Die unerträgliche Unbehülflichkeit einer ſolchen Darſtellung würde dadurch ſehr vermindert, daß man auf der einen Seite Figuren zu Hülfe nähme, und auf der andern Seite ſich um die vollſtändige Form der Vernunftſchlüſſe nicht bekümmerte, wie man dieß ja auch in den Beweiſen der Lehrſätze nicht thut. In einer ſolchen Zuſammenſtellung der geometriſchen Sätze würde, wie ſich leicht überſehen läßt, jeder Schlußſatz gleichſam ein Lehrſatz ſeyn.

Um nun das Verhältniß des Lehrſatzes mit ſeinem Beweiſe zum Syſteme der Geometrie anzugeben: ſo iſt der Lehrſatz eine Unterbrechung des ganzen Syſtems von Vernunftſchlüſſen, welches das (eigentliche) Gebäude der Geometrie ausmacht; mit andern Worten: eine Unterbrechung des rein ſynthetiſchen Vortrags der Geometrie. Die Propoſition des Lehrſatzes iſt ein Schlußſatz, der in logiſcher Unabhängigkeit von ſeinen Vorderſätzen ausgeſprochen, und gleichſam als Ueberſchrift über das engere Syſtem von Vernunftſchlüſſen geſetzt wird, das man ihm als Beweis hin-

zufügt. Je stärker die Unterbrechung des synthetischen Vortrags ist, desto länger ist der Beweis *).

Der wissenschaftliche, die Erkenntniß befördernde, Werth einer solchen Form, nach welcher die Reihe der nach einander stehenden Vernunftschlüsse durch Lehrsätze unterbrochen wird, und der Vorzug derselben vor der ununterbrochenen Reihenfolge von Vernunftschlüssen, besteht

a) darin, daß die wichtigeren geometrischen Sätze vor den andern hervorgehoben, und als solche ausgezeichnet werden, die man sich im Gedächtnisse zu bemerken hat, theils des Interesse wegen, das sie an sich selbst haben, theils der Anwendung wegen, die bey der Herleitung späterer geometrischer Wahrheiten von ihnen gemacht wird. Bey der ununterbrochenen Reihenfolge von Vernunftschlüssen hingegen ist jeder Schlußsatz gleichsam ein Lehrsatz; logisch ist in seinem Verhältnisse zum ganzen Systeme keiner vor dem andern ausgezeichnet; interessante und uninteressante, fruchtbare,

*) Sehr oft lassen sich ungezwungen mehrere Lehrsätze in einen zusammenziehen, so daß die früheren bloß Theile des Beweises des späteren ausmachen; und umgekehrt läßt sich oft ungezwungen ein Lehrsatz in zwey oder mehrere andere zerlegen, so daß der spätere in seinem Beweise von dem früheren Anwendung macht. So kann z. B. der in Klügels Wörterbuch III. S. 932 mitgetheilte Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes, der ebenfalls in unsere Sammlung (S. unten zu §. 79) aufgenommen ist, sehr gut in die Beweise zweyer Lehrsätze zerlegt werden, nämlich: 1) „Wenn auf den Seiten eines Quadrats (auf dem Umfange nach derselben Richtung herum gehend) in gleichem Abstand von den Ecken vier andere Punkte genommen und dieselben durch gerade Linien vereinigt werden, so ist das von diesen Linien gebildete Viereck ebenfalls ein Quadrat." 2) „Das Quadrat der Hypotenuse u. s. w."

Von dieser Bemerkung kann der Lehrer der Geometrie Gebrauch machen, um das von ihm behandelte Thema, je nach dem Bedürfnisse seines Unterrichts, länger oder kürzer, schwerer oder leichter zu machen.

und unfruchtbare Sätze stehen hier ohne Rangordnung unter einander.

b) darin, daß auch die Begründung dieser wichtigern geometrischen Sätze leichter übersehen und behalten werden kann. Der Beweis eines solchen Satzes nämlich beruft sich unter den im Systeme früher vorgekommenen Sätzen nur auf solche, die selbst wieder als wichtigere Sätze hervor gehoben, und dadurch dem Gedächtniß anempfohlen waren.

Wenn ich den Kriterien der absoluten Begründung geometrischer Wahrheiten einen eigenen Abschnitt widmen wollte; so würde mich das zu weit führen. Ich benutze daher die sich mir an dieser Stelle der Einleitung darbiethende Gelegenheit, um das Wenige, was ich darüber nicht ungesagt lassen möchte, hier einzuschalten. Der Beweis irgend einer geometrischen Proposition, z. B. in Euklid, könnte eine relative Begründung genannt werden, insofern der nothwendige Zusammenhang mit im Systeme früher vorgekommenen Sätzen durch Vernunftschlüsse dargethan, und ein jeder dieser früheren Sätze als begründet angenommen wird. Wenn diese früheren Sätze wirklich begründet sind; so ist dann die Proposition absolut begründet. Dem Lernenden, der im Systeme der Geometrie (und in der Mathematik überhaupt) einige Schritte vorwärts gethan hat, und die zurückgelegten Sätze als begründet annimmt, wird es nicht sehr schwer, die Herleitung der folgenden Sätze, also die relative Begründung derselben, bis zu den höchsten Stufen der bereits ausgebildeten Mathematik zu fassen und zu durchschauen, wenn er zur Erreichung dieses Gipfels der Wissenschaft den gehörigen Fleiß und die nöthige Zeit verwendet. Ganz anders aber verhält es sich mit der absoluten Begründung der ersten Sätze des Systems, und somit aller Sätze des Systems. Um zu dieser absoluten Begründung zu gelangen, könnte man zwey Wege versuchen, die dem analytischen und synthetischen Gang in der Geometrie analog sind. Auf dem ersten Wege könnte man von den relativ begründeten Sätzen rückwärts zur näheren Be-

trachtung der Sätze gehen, die man zur relativen Begründung jener angewandt hat, untersuchen, welche von ihnen absolut, und welche nur relativ begründet sind, die relativ begründeten unter diesen wieder näher betrachten, und so fort, bis man auf lauter absolut begründete Sätze gekommen wäre, und damit das ganze System absolut begründet hätte. Auf dem zweyten Wege würde man jede bloß relative Begründung ganz verwerfen, und nicht eher weiter gehen, als bis alle ausgesprochenen Sätze absolut begründet wären. Da die Gelehrten uneinig sind, wie weit man auf jenem Wege zurück zu gehen, oder von wo man auf diesem Wege auszugehen habe, um in den Besitz der absoluten Begründung zu gelangen *); so sind folgende zwey Fragen nicht am unrechten Orte: 1) Ist es bloß Gegenstand der Wissenschaft überhaupt, oder ist es auch Gegenstand der Mathematik insbesondere, sich mit der Untersuchung über die Begründung der ersten Sätze aufzuhalten? Und genügt es nicht der Mathematik, als solcher, daß ein Jeder, der die ersten zur relativen Begründung nachfolgender dienenden Sätze hört, von ihrer Wahrheit subjectiv überzeugt ist; kann sie nicht vielmehr die weitere Untersuchung über absolute Begründung derselben der Philosophie überlassen? 2) Gesetzt aber auch, daß sich die Mathematik als Wissenschaft einer solchen Untersuchung nicht überheben dürfte, ist der Unterricht, und

*) „Wie sicher indessen man über der alther vererbten Sage, von der untrüglichen Gewißheit der Erkenntniß in Mathematik, zu schlafen fortfuhr: so wurde gleichwohl in neueren Zeiten unter den Philosophen über Quelle, Grund, Fundament dieser Gewißheit gestritten. Das ist, — damit man nicht, aus Sonderbarkeit des Ereignisses, mich mißverstehe, — nicht wurde bestritten die Erkenntniß und ihre Gewißheit, nicht wurde bestritten, daß dieselbe eine sichere Grundlage habe, Frage und Streit war nur um das, was denn die wirkliche Grundlage der Gewißheit sey." Erb zur Mathematik und Logik. Vorspiele zu ihrer Erweiterung und Begründung. Erste Lieferung. Heidelberg 1821; daselbst S. 52.

namentlich der Schulunterricht an die Mittheilung eines absolut begründeten Systems der Geometrie gebunden? so gebunden, daß er nicht mit als begründet angenommenen Sätzen, von deren Wahrheit die Lernenden subjectiv überzeugt sind, beginnen, und, unbekümmert über die absolute Begründung der ersten Sätze bis zu den höchsten Theilen der Mathematik fortschreiten dürfe? — Was die Beantwortung der ersten Frage betrifft, so spreche ich es nur als Meinung aus, für deren Beweis ich nicht verpflichtet seyn will, daß es der Mathematik, als solcher, zu ihrer Begründung an der Wahrheit folgender Behauptung Genüge: Unter der Voraussetzung, daß die Vordersätze wahr sind, und die Schlußsätze logisch richtig aus den Vordersätzen abgeleitet sind, sind diese Schlußsätze ebenfalls wahr. Die Vordersätze sind aber theils Schlußsätze aus anderen Vordersätzen; theils sind es solche Sätze, die wir schon an und für sich für wahr halten, ohne sie aus anderen Vordersätzen abgeleitet zu haben, die wir also als wahr voraussetzen (Voraussetzungen, Hypothesen) *).

---

*) Bey der deductio ad absurdum leitet man aus wirklich falschen Voraussetzungen, auf logisch richtigem Wege, Schlußsätze her, die ebenfalls falsch sind. Die Falschheit dieser Schlußsätze wird daraus erkannt, daß dieselben den anderen Schlußsätzen, die wir für wahr halten, widersprechen. Aus der Falschheit der Schlußsätze erkennen wir dann die Falschheit der zu Vordersätzen gebrauchten Voraussetzungen. Die Mathematik als solche läßt es unbegründet, welcher von den beyden sich widersprechenden Schlußsätzen eigentlich der wahre sey, sie behauptet nur, daß nicht beyde zugleich wahr seyn können. Der Mathematiker aber in seiner subjectiven Erkenntniß entscheidet sich für die Wahrheit des einen Satzes, weil derselbe aus Voraussetzungen, die sein Verstand nicht für falsch halten kann, richtig abgeleitet worden ist. Daß der Verstand diese Voraussetzungen nicht für falsch halten kann, hat wohl auch seinen

Die Gewißheit in der Mathematik, als solcher, beruht nicht auf einer absoluten Begründung ihrer Sätze, sondern auf der relativen Begründung derselben, durch Voraussetzung anderer Sätze, die wir für wahr halten müssen, und nicht für falsch halten können, und deren Gegentheil wir für falsch halten müssen, und nicht für wahr halten können *). Für die Er-

---

Grund; aber die Mathematik als solche hat sich um diesen Grund nicht zu bekümmern. Man vergleiche damit, was Erb a. a. O. S. 62 sagt: „In Summa: Mathematik und Logik enthalten mir beyde durchaus keine Erkenntnisse. Durchweg sollen sie eine Schöpfung unserer Freyheit seyn (nämlich der Freyheit von dem naturgesetzmäßigen Vorstellen; aber dieses Vorstellen nach seinem eigenen Naturgesetze gewältiget und beherrscht von eben dieser Freyheit her): Logik eine selbstgeschaffene Kunst, Mathematik ein, nach dieser Kunst, selbstgeschaffenes Werkzeug (Organon) der Erkenntniß. Freyheit ihr einziger Ursprung."

*) Es gibt viele Sätze, die wir für wahr halten müssen, und die noch eine relative Begründung durch andere Sätze, die wir ebenfalls für wahr halten müssen, zulassen. Daraus folgt aber nicht, daß sie dieser relativen Begründung bedürfen. So läßt sich z. B. Euklids 6tes Axiom aus dem ersten ableiten.

Obers. Wenn eine erste und eine zweyte Größe einer dritten Größe gleich ist, so ist die erste Größe der zweyten gleich. (Grundsatz).

Unters. Irgend eine Größe doppelt genommen, ist wieder eine Größe. (Leichte Folgerung aus der Erklärung von Größe.)

Schlußs. Also wenn eine erste und eine zweyte Größe dem Doppelten einer dritten Größe gleich sind, so ist die erste Größe der zweyten gleich.

Man würde Unrecht haben, wenn man das sechste Euklidische Axiom nicht als Axiom gelten lassen wollte.

Eben so ist es wahrscheinlich, daß der Satz von der Gleichheit der correspondirenden Winkel, wenn zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, noch eine relative Begründung, ohne Beyhülfe des anstößlich bekannten

weiterung der Mathematik war es sehr ersprießlich, daß sich die Erfinder in derselben mit der absoluten Begründung der ersten Sätze wenig aufgehalten haben. Auch wird diese Wissenschaft denjenigen wenig Dank zollen, die sich mit einer solchen Arbeit, sey es mit oder ohne Erfolg, ernstlich beschäftigen. — In Beantwortung der obigen zweyten Frage (S. 79.) wage ich dreist die Behauptung, daß, Falls auch die Mathematik als Wissenschaft sich der in Rede stehenden Untersuchung nicht überheben dürfte, der Schulunterricht sowohl von einer solchen Untersuchung selbst, als auch von den etwaigen Resultaten derselben ganz abstrahiren müsse. Der geometrische Schulunterricht beginnt mit als begründet angenommenen Sätzen; es genügt ihm, daß die Lernenden von ihrer Wahrheit überzeugt sind; obgleich er auf gründliches Merken und festes Behalten dieser wenigen Sätze dringt, so hält er sich doch nicht gern mit Auseinandersetzungen auf, die dem Anfänger überflüssig scheinen, (gesetzt, daß sie es auch nicht wären), und daher seine Aufmerksamkeit nicht reizen; er eilt zu der Herleitung anderer Sätze, deren Wahrheit erst durch Schlüsse gründlich eingesehen wird, die dem Lernenden ein großes Interesse und seinem

---

11ten Axioms oder eines ähnlichen unbewiesenen Satzes, zulasse. Aber nothwendig ist eine solche relative Begründung nicht.

Ich war durch mehrfache Beweggründe, die ich mit Stillschweigen übergehen muß, in die Versuchung geführt worden, die einzelnen §§ des geometrischen Theils meines Lehrbuchs, nach welchen die ganze Sammlung geordnet ist, umständlicher zu erläutern und zu rechtfertigen. Allein etwas der Art wäre dem einzigen Zweck dieser Sammlung, dem Lehrer der Geometrie Materialien für seinen Unterricht zu liefern, fremdartig gewesen. Die Sätze des Lehrbuchs, wie sie oben von Seite 3 bis 26. ausgesprochen sind, gelten daher bey den Auflösungen und Beweisen der folgenden Aufgaben und Lehrsätze als bereits für wahr anerkannte Sätze, als Voraussetzungen, ohne uns darum zu bekümmern, auf welche Weise diese Sätze begründet worden sind.

Verstande die vorzüglich bezweckte Uebung gewährt. Weit leichter wird es dem Schüler, den zusammen gesetzten Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes, als irgend einen sehr leichten indirecten Beweis zu führen: dort wird ihm die Thätigkeit seines Verstandes zum Vergnügen, weil er den Zweck derselben (Erforschung und Begründung der Wahrheit) einsieht; hier wird sie ihm zur Last, weil er die Anforderungen an seinen Verstand für fremde Laune hält. Erzählt nicht irgendwo A. von Humboldt, wie schwer es ihm ward, die Blüthen der hohen Palmbäume zu erhalten, weil sich die Indianischen Knaben, obgleich sie sonst mit größter Leichtigkeit die höchsten Bäume erklettern, sich zum Herabholen der verlangten Blüthen, dessen Zweck sie nicht einsahen, nicht bewegen lassen wollten? Aehnliche Unwillfährigkeit fand der Französische Physiker Amontons, als er seine Versuche über das Maximum des Effects beym Hinauftragen von Lasten durch Menschen anstellen wollte. Es handelte sich nämlich um die technisch-interessante Frage, ob der Arbeiter in seiner Arbeit weiter komme, d. h. mehr ausrichten könne, wenn er mit kleineren Lasten öfter, oder mit größeren Lasten langsamer gehe; und um die Bestimmung derjenigen Größe der Last, bey welcher die Arbeit des Hinauftragens im Ganzen am schnellsten von Statten geht. Den Trägern kam es lächerlich und zwecklos vor, daß sie dieselbe Last unaöufhrlich auf demselben Wege bergauf und bergab tragen sollten.

Nachdem nun das Verhältniß des Lehrsatzes zum Systeme der Geometrie festgesetzt ist; so gehen wir zur Bestimmung der passendsten Form des Lehrsatzes über.

a) Der Lehrsatz zerfällt in die beyden Hauptabtheilungen: Proposition und Beweis. (Vgl. oben S. 70). In dem Euclides Hervagii (s. oben S. 29.) sind beyde dadurch unterschieden, daß die Proposition mit größerer Schrift gedruckt ist; sonst durch nichts, so wie auch die Theile des Beweises ebenfalls nicht von einander unterschieden sind. Die 48 Sätze des ersten Buches, sind nach einander, ohne Unter-

schied ob sie Aufgaben oder Lehrsätze sind, mit α, β, γ u. s. w. bis $\mu\eta$ bezeichnet. Das zweyte Buch fängt wieder mit α an. U. s. w. Außer diesen Buchstaben, durch welche sie nach der Reihe gezählt werden, sind die einzelnen Sätze gar nicht überschrieben.

b) Die Proposition des Lehrsatzes wird am besten ohne alle Hinweisung auf irgend eine Figur ausgesprochen.

So macht es auch Euklid.

Mit Hinweisung auf die Figur finden unter den Geometern zweyerley Manieren Statt.

α) Einige sprechen die Proposition ganz vollständig mit Worten gerade so aus, wie sie ohne Hinweisung auf die Figur ausgesprochen werden müßte.

So macht es Lorenz in seiner Uebersetzung des Euklid: „In jedem spitzwinkligen Triangel, ABC, wird das Quadrat der einem spitzen Winkel gegen überliegenden Seite, AC, von den Quadraten der ihn einschließenden Seiten, AB, BC, übertroffen, um das zwiefache Rectangel aus einer der einschließenden Seiten, CB, und ihrem Abschnitt, BD, vom spitzen Winkel, B, bis zu dem Perpendikel, AD, den man auf dieselbe von ihrem Gegenwinkel, A, fället." (Eukl. II. 13.)

β) Andere suchen die Aussprache der Proposition durch Hinweisung auf die Figur abzukürzen.

„Wenn in einem Dreyeck, ABC, eine Linie, DE, parallel mit einer Seite, BC, gezogen wird, so ist das Dreyeck ADE dem Dreyeck ABC ähnlich." Statt: „so ist das abgeschnittene Dreyeck, ADE, dem ganzen, ABC, ähnlich."

Eine Proposition, ohne alle Hinweisung auf eine Figur ausgesprochen, läßt sich weit leichter im Gedächtnisse behalten; sie wird auch weit leichter (wie Lorenz in der Einleitung bemerkt) „rein von aller individuellen Vorstellung, in ihrer ganzen Allgemeinheit gedacht."

c) Der Beweis des Lehrsatzes wird am zweckmäßigsten mit Hinweisung auf die Figur geführt.

So machte es Euklid.

Der Vortheil, der durch die Beweisführung ohne Figur bezweckt wird, nämlich sich auch die Gründe eines geometrischen Satzes rein von aller individuellen Vorstellung in ihrer ganzen Allgemeinheit zu denken, kommt, da derselbe Vortheil sehr bald auch ungeachtet der Hinweisung auf die Figur erreicht wird, gegen die Nachtheile der Umständlichkeit in keinen Betracht, die ohne Anwendung der Figuren nicht vermieden werden kann. Da der Beweis nur ein untergeordneter Theil im Systeme der Geometrie ist, so veranlaßt die Anwendung der Figuren um so weniger Misstand. — Im 16ten Jahrhundert kam Scheubelius auf den Einfall, auf jene seltsame Weise die Geometrie zu lehren, und die sechs ersten Bücher des Euklid ohne alle Hinweisung auf Figuren in Lateinischer Sprache herauszugeben *) — eine Uebersetzung läßt sich's nicht nennen, da er sehr viele Worte und Sätze hinzufügen mußte, indem die Euklidischen Beweise (vgl. einen solchen, oben in der Note zu Seite 62.) ganz und gar nicht darauf eingerichtet sind, daß sie mit Auslassung der Hinweisung auf die Figur noch verstanden werden könnten. Bisweilen mag es eine sehr gute didactische Uebung seyn, den Schüler einen Beweis nach der Methode des Scheubelius führen zu lassen. Daher setze ich als Beyspiel eine Deutsche Uebersetzung seines Beweises des Pythagoräischen Lehrsatzes (a. a. O. S. 134.) her:

„In rechtwinkligen Dreyecken ist das Quadrat der Seite, welches dem rechten Winkel gegen über liegt, den

---

*) Euclidis Megarensis, Philosophi et Mathematici excellentissimi, sex libri priores, de Geometricis principiis, Graeci et Latini, [die προτασεις der Aufgaben und Lehrsätze sind nämlich Griechisch und Lateinisch ausgesprochen], una cum demonstrationibus propositionum, absque literarum notis, veris ac propriis, et aliis quibusdam, usum earum concernentibus, non citra maximum hujus artis studiosorum emolumentum adjectis. Algebrae porro etc. Authore Joanne Scheubelio, in inclyta Academia Tubingensi Euclidis professore ordinario. Basileae per Joannem Hervagium; Anno MDL.

Quadraten der Seiten gleich, welche den rechten Winkel einschließen.

Es seyen ein rechtwinkliges Dreyeck, und über den einzelnen Seiten desselben, dem obigen Lehrsatz gemäß, Quadrate beschrieben: so sage ich, daß das Quadrat der Seite, welches dem rechten Winkel gegen über liegt, so groß sey, als die Quadrate, welche über den übrigen zwey Seiten, die den rechten Winkel einschließen, beschrieben werden.

Aus dem rechten Winkel des Dreyecks, als aus einem gegebenen Punkte, werde, nach Satz 12, eine senkrechte Linie auf die ihm gegen über liegende Seite gefällt, und diese werde durch das Quadrat hindurch bis zur gegen über liegenden Seite verlängert; so wird das Quadrat der Seite, welches dem rechten Winkel gegen über liegt, in zwey Parallelogramme getheilt seyn, von welchen sogleich bewiesen werden wird, daß das eine dem einen, und das andere dem andern Quadrate der übrigen Seiten gleich sey.

Denn da das Dreyeck nach der Voraussetzung rechtwinklig ist, und die einzelnen Winkel der Quadrate, nach der Erklärung, ebenfalls rechte Winkel sind; so macht der rechte Winkel im rechtwinkligen Dreyeck mit einem jeden der anliegenden Winkel zwey rechte Winkel aus. Daher liegt die eine Seite eines jeden der beyden Quadrate, die nicht Seite des Dreyecks ist, mit der Seite des Dreyecks, die zum andern Quadrate gehört, nach Satz 14, in einer einzigen geraden Linie; was wohl zu merken ist.

Da ferner alle rechten Winkel, nach Grundsatz 10, unter sich gleich sind, und da auch, wenn zu Gleichem Gleiches oder Gemeinschaftliches hinzu gefügt wird, Gleiches heraus kommt: so werden, indem man von diesen Sätzen zweymal Anwendung macht, auf beyden Seiten des rechtwinkligen Dreyecks, um dessen spitze Winkel herum, zwey Winkel zweyen Winkeln gleich seyn; was ebenfalls zu merken ist.

Da nun dieses also bewiesen ist, so kann die Wahrheit des Satzes dadurch dargethan werden, daß man Linien zieht, wie sogleich angegeben wird.

Man ziehe aus dem rechten Winkel des Dreyecks nach den beyden von ihm entfernteren Winkeln des schon eingetheilten Quadrates, zwey gerade Linien. Da durch diese zwey geraden Linien zwey Dreyecke beschrieben sind, und da diese Dreyecke und die ihnen zugehörigen Parallelogramme, dieselbe Grundlinie haben und zwischen denselben Parallellinien liegen: so sind die Dreyecke die Hälften der Parallelogramme, oder umgekehrt, diese die Doppelten jener, wie durch Satz 41 schon längst bewiesen ist.

Endlich werden auch aus den spitzen Winkeln des rechtwinkligen Dreyecks zwey gerade Linien gezogen, deren jede durch die Seite, die demselben Winkel gegen über liegt, bis zu demjenigen Winkel des Quadrats geht, mit welchem der spitze Winkel bis jetzt noch durch keine gerade Linie verbunden war. Auf diese Art werden aber zwey andere Dreyecke beschrieben, welche eben so die Hälften ihrer Parallelogramme, d. i., der über den zwey Seiten beschriebenen Quadrate sind Da diese auch, nach Satz 4, zweymal angewandt, den vorhin beschriebenen Dreyecken, ein jedes dem seinigen, gleich sind: so sind diese Quadrate auch die Doppelten jener vorigen Dreyecke. Aber da die zwey Theil-Parallelogramme des getheilten Quadrats ebenfalls die Doppelten jener vorigen Dreyecke sind, wie oben bewiesen worden ist: so sind also, nach dem Grundsatz, daß die Doppelten derselben Größe ebenfalls gleich sind, die Theil-Parallelogramme, oder das Quadrat der Seite, welche dem rechten Winkel gegen über liegt, den Quadraten der zwey andern Seiten gleich. In rechtwinkligen Dreyecken also ist das Qradrat, welches über der Seite, die dem rechten Winkel gegen über liegt, beschrieben wird, den Quadraten gleich, welche über den Seiten, die den rechten Winkel einschließen, beschrieben werden; was zu beweisen war."

d) In den meisten *) Beweisen lassen sich die von Proklus (S. oben S. 62.) angegebenen fünf Theile, nämlich: Exposition, Determination, Construction, Demonstration und Conclusion, wirklich sehr leicht von einander unterscheiden (Siehe Hauber S. 141—165.).

So wenig Euklid die Proposition und den Beweis von einander unterschieden hat, so wenig bezeichnet er auch durch äußere Zeichen die Unterabtheilungen des Beweises.

Es ist zweckmäßig, die Schüler reiferer Classen mit den Unterabtheilungen des Beweises bekannt zu machen. Der Verstand solcher Schüler, möchte ich sagen, ist ausgebildet genug, um die, bereits nicht mehr fremde, Geometrie als einen vorliegenden Stoff, gleichsam von einem außerhalb desselben angenommenen Standpunkte aus, zu betrachten, ohne über solchen entfernteren Betrachtungen und Raisonnements die Lust

---

*) Vgl. oben S. 66.

an dem weit mühseeligeren Erwerb wirklicher Kenntnisse zu verlieren. Mit Anfängern dagegen mache man über die Form der geometrischen Darstellung so wenig Worte wie möglich.

Die Ordnung, in der die einzelnen Unterabtheilungen des Beweises auf einander folgen, ergibt sich durch einen natürlichen Tact von selbst. Anfänger möchte ich geradezu diesem Tact überlassen, und mich nur darauf beschränken, daß sie logisch richtig Grund und Folge unterscheiden, und den Zusammenhang beyder grammatisch richtig bezeichnen. Dahin gehört unter andern auch, daß sie nicht vergessen, jeder im Beweise ausgesprochene Satz habe einen Zweck, für den er ausgesprochen worden ist, und dieser Zweck müsse aus der Darstellung deutlich erkannt werden *), d. h. es müsse von jedem im Beweise ausgesprochenen Satze (den oder die letzten Schlußsätze ausgenommen), im Beweise selbst Anwendung gemacht werden.

Ich habe mehre Euklidische Beweise bloß in der Absicht durchgegangen, um zu sehen, ob sich Euklid streng an die Unterabtheilungen des Beweises hält oder nicht. Unter den in dieser Hinsicht nachgesehenen war keiner, wo er abgewichen wäre. Die Lorenzische Uebersetzung dagegen (außerdem, daß bey ihr die Exposition und Determination dadurch, daß sich schon die Proposition auf die Figur bezieht, von selbst wegfallen) bindet sich nicht streng an diese Form. Z. B. beym Pythagoräischen Lehrsatze construirt er zuerst das Quadrat der Hypotenuse, und die Quadrate der beyden Katheten, leitet sogleich daraus her, daß die Katheten mit den Quadratseiten in Einer geraden Linie liegen, und fährt dann in der Construction fort; so daß er also die Construction durch einen Theil der Demonstration unterbricht. Euklid thut das bey diesem Beweise nicht. Wer aber möchte behaupten, daß die Darstel-

---

*) Schüler, welche den Beweis bloß auswendig lernen, sprechen z. B. drey gleiche Stücke an zweyen Dreyecken aus, und vergessen, daraus auf die Congruenz dieser Dreyecke oder auf die Gleichheit eines oder mehrer andern Stücke den Schluß zu machen.

lung des Lorenz fehlerhaft wäre? Wer möchte sie nur als unzweckmäßig oder unordentlich mit Tadel belegen?

Auf die Art, wie in dem Lorenzischen Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes, lassen sich sehr oft die Construction und Demonstration unter einander vermengen, ohne daß dabey an der guten Ordnung des Beweises mit Grund etwas vermißt wird. Besonders, wenn die Construction nicht ganz kurz ist, gewinnt die Anordnung des Beweises oft an Natürlichkeit und Faßlichkeit, wenn an die einzelnen Theile der Construction, die Folgerungen, die sich daraus ergeben, unmittelbar angeknüpft werden.

Die Determination jedesmal auszusprechen, halte ich auch nicht für nöthig. Sie ist wenigstens kein wesentlicher Theil des Beweises; kein Satz, auf den im Beweise weiter gebaut wird; vielmehr das Ziel, auf welches der Beweis losgeht, und das eigentlich der Beweisführer im Kopfe haben soll, um darauf los zu gehen. Wenn die Proposition deutlich ausgesprochen, und die Demonstration sehr kurz ist, so erscheint die Aussprache der Determination, da sie sich ein jeder leicht hinzu denken kann, als etwas Ueberflüssiges. Zweckmäßig ist die Aussprache der Determination vorzüglich dann, wenn sie, durch die Hinweisung auf die Figur, der ohne die Figur weniger deutlich und bestimmt ausgesprochenen Proposition gleichsam zur Erläuterung dient *), und auch dann, wenn die Demonstration sehr lang ist. — Euklid spricht die Determination

*) Savilius macht auf diesen Nutzen der Exposition und Determination aufmerksam. Siehe Hauber a. a. O. S. 186. Vgl. auch Hauber S. 223, wo er (nämlich Hauber) diese Anwendung der Exposition und Determination sogar so weit ausdehnt, daß der Kürze wegen in der Proposition wohl dieses oder jenes ausgelassen werden dürfe, was, streng genommen, da stehen müsse, wenn es nämlich leicht zu ergänzen sey, oder durch die nachfolgende Exposition und Determination erläutert werde. Als Lehrer bin ich hierin mit Hauber einverstanden.

vielleicht immer aus. In dem 7ten Satze des ersten Buches ist sie nicht ausgesprochen; allein es sind Gründe vorhanden, diesen Satz, so wie er da steht, nicht als aus der Feder des Euklid geflossen zu halten. (Vgl. R. Simson S. 646; Hauber p. 228.).

Oben (S. 67.) ist in der mitgetheilten Stelle des Proklus von einer doppelten Conclusion die Rede gewesen; nämlich von der ersten, welche der Exposition entspricht, also mit Hinweisung auf die Figur ausgesprochen wird, und von der zweyten oder allgemeinen, welche die Proposition des Lehrsatzes ohne Hinweisung auf die Figur wiederholt. Die erste ist offenbar nothwendig, weil sonst der Beweis kein Ganzes ist; sie ist derjenige Satz, um dessentwillen alle im Beweise voran stehenden Sätze da sind; sie steht auch bey Euklid immer als integrirender Theil der Demonstration. Sie kann selbst dann nicht wegbleiben, wenn auch die Determination nicht ausgesprochen worden ist. Dagegen halte ich die zweyte Conclusion, obgleich sie von Euklid jedesmal ausgesprochen wird, für durchaus überflüssig. Hiermit scheint auch die getreue Uebersetzung von Hauff einverstanden zu seyn, indem sie von dieser zweyten Conclusion jedesmal nur die Anfangsworte hat: „Wenn demnach in zwey Dreyecken u. s. w. wie zu erweisen war." Eben so überflüssig ist die Schlußformel („wie zu erweisen war" oder „was zu verrichten war"), besonders dann, wenn man schon die Proposition mit „Lehrsatz" oder „Aufgabe" überschrieben hat.

Eine andere, ganz zulässige Abweichung von der Form der fünf Unterabtheilungen ist die, daß man die Exposition in der Construction und Demonstration versteckt vorträgt. Der Beweis des Satzes §. 43. im Lehrbuche z. B. fängt so an: „Man ziehe aus der Spitze C auf die Mitte der Grundlinie AB des gleichschenkligen △ ABC eine gerade Linie CD, so ist u. s. w.," wo Voraussetzung (oder Exposition) und Construction unter einander vorgetragen sind; und gewiß nicht zum Nachtheil der Deutlichkeit, dagegen sehr zum Vortheil der Kürze.

Was demnach die Unterabtheilungen des Beweises betrifft, (um das, was darüber eben gesagt worden, kurz zu wiederholen); so sind

1) Die verschiedenen Theile des Beweises nicht durch besondere Ueberschriften zu unterscheiden;

2) Es ist nicht einmal nöthig, sie streng und ohne alle Ausnahme von einander abzusondern. Die Theile der Construction und Demonstration lassen sich z. B. unter einander verweben. Die Voraussetzungen lassen sich versteckt in der Construction und Demonstration vortragen.

3) Auch ist es nicht nöthig, jedesmal alle diese Theile (abgesehen von denen, welche in einem bestimmten Beweise nicht vorhanden sind; vgl. oben S. 66) wirklich auszusprechen. Die allgemeine Conclusion z. B. kann fast immer, die Determination sehr häufig ausgelassen werden.

e) Eine besondere Betrachtung in Hinsicht auf Form verdienen diejenigen Beweise, welche aus mehren Theilen bestehen, und diejenigen, bey welchen man sich auf eine Unterscheidung mehrer Fälle einlassen muß.

1) Ein Beweis besteht dann aus mehren Theilen, wenn die Proposition so ausgesprochen ist, daß sie sogleich (ohne Hinzufügung neuer Sätze) in mehre Propositionen zerlegt werden kann.

Oben nämlich, in den mitgetheilten Stellen des Proklus (S. 63), wurde gesagt, daß die Proposition der Aufgaben und Lehrsätze meist aus einem Gegebenen und einem Gesuchten bestehe. Das Gegebene, ohne Hinsicht auf die Figur ausgesprochen, ist nämlich einerley mit der Exposition (oder Voraussetzung), mit Hinweisung auf die Figur ausgesprochen; und das Gesuchte, ohne Hinweisung auf die Figur ausgesprochen, stimmt mit der Determination überein. Da wir gegenwärtig zuerst nur von Lehrsätzen reden, so wollen wir mit den Neuern *)

---

*) Quaelibet propositio in Hypothesin et Thesin commode distinguitur: quarum ista conditiones recenset, sub quibus ali-

die beyden Theile der Proposition des Lehrsatzes lieber Hypothesis und Thesis nennen, weil jene Benennungen in der That nur auf die Propositionen der Aufgaben passen.

Es kann nun die Hypothesis der Proposition eines Lehrsatzes mehre Bedingungen enthalten; eben so kann die Thesis Mehrerley aussprechen, was unter den gesetzten Bedingungen Statt findet.

So Vielerley die Thesis ausspricht, in eben so viele Propositionen läßt sich vorweg die vorgelegte Proposition zerlegen. Z. B. der Lehrsatz (Lehrbuch §. 48): „Wenn man durch die Spitzen zweyer gleichschenkligen Dreyecke, die auf derselben Grundlinie stehen, eine gerade Linie zieht, so geht diese senkrecht durch die Mitte der Grundlinie", zerfällt in die beyden Lehrsätze: 1) diese gerade Linie steht auf der Grundlinie senkrecht; 2) diese gerade Linie halbirt die Grundlinie. Eben so läßt sich der Lehrsatz (Euklid XI. 24): „Wenn ein Körper von parallelen Ebenen eingeschlossen wird, so sind seine gegen über liegenden Seitenflächen einander gleich, und Parallelogramme", in die beyden Lehrsätze zerlegen: 1) wenn — — —, so sind seine gegen über liegenden Seitenflächen einander gleich; und 2) wenn — — —, so sind seine gegen über liegenden Seitenflächen Parallelogramme.

Etwas ähnliches findet aber bey der Hypothesis nicht immer Statt. Wenn z. B. die Gleichheit dreyer Seiten als Bedingung der Congruenz zweyer Dreyecke (der Thesis) gesetzt wird; so kann ich daraus, obgleich die Hypothesis drey Bedingungen, (nämlich die Gleichheit der ersten, die Gleichheit der zweyten und die Gleichheit der dritten Seite) enthält, doch keine drey Lehrsätze machen. Es werden nämlich alle drey Bedingungen zugleich erfordert, damit die Thesis wahr sey. Dagegen kann der Lehrsatz (Euklid I. 26): „Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Winkel einander stückweise gleich

---

quid affirmatur, vel negatur; haec vero complectitur, quod vel affirmatur, vel negatur." Wolfii Elem. Tom. I. p. 12.

sind, und es ist auch eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, sie mag nun an den gleichen Winkeln oder einem derselben gegen über liegen, so sind auch die übrigen Seiten in beyden Dreyecken einander stückweise gleich, und der dritte Winkel des einen ist dem dritten Winkel des andern gleich" vermöge der Zerlegbarkeit der Hypothesis vorerst in zwey Lehrsätze zertheilt werden: 1) „Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Winkel einander stückweise gleich sind, und es ist auch die Seite, die an den gleichen Winkeln liegt, des einen der des andern gleich, so u. s. w." und 2) „Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Winkel gleich sind, und es ist auch die Seite, die einem derselben gegen über liegt, des einen der gleich liegenden Seite des andern gleich, so u. s. w. Jeder dieser beyden Lehrsätze kann, vermöge der Zerlegbarkeit der Thesis, von Neuem in mehre Lehrsätze zerfällt werden.*)

*) Ueber einfache und zusammengesetzte Lehrsätze schreibt Proklus, in seinen Bemerkungen zu Euklid I Satz 5, also: „Unter den Lehrsätzen sind die einen einfach, die andern zusammengesetzt. Ich nenne aber einfach diejenigen, welche sowohl in Hinsicht auf die Voraussetzungen (ὑποϑέσεις), als auch in Hinsicht auf die Schlüsse (συμπεράσματα) unzertheilbar sind, indem sie nur Ein Gegebenes und nur Ein Gesuchtes haben; zum Beispiel, wenn der Verfasser der Elemente gesagt hätte, Ein jedes gleichschenklige Dreyeck hat die Winkel an der Grundlinie gleich. Zusammengesetzt aber diejenigen, welche aus mehreren bestehen, indem sie entweder die Voraussetzungen, oder, bey einfacher Voraussetzung, die Schlüsse, oder beyde zusammengesetzt enthalten. Und diese sind theils verbundene (ϑεωρήματα συμπεπλεγμένα, theoremata complexa), theils unverbundene (ϑ. ἀσύμπλεκτα, th. incomplexa). Die unverbundenen sind solche, welche, obgleich sie zusammengesetzt sind, doch nicht in einfache Lehrsätze zerlegt werden können, wie der vierte. Denn in diesem ist sowohl das Gegebene als das Geschlossene zusammengesetzt; aber es ist nicht möglich, das Gegebene in seine einfachen Theile zu zerlegen und zu Lehrsätzen zu machen. Denn wenn die Dreyecke bloß die [zwey] Seiten gleich

Lehrsätze mit zerlegbaren Propositionen lassen sich wirklich in mehre Lehrsätze zerlegen; und jeder dieser Lehrsätze läßt sich mit seinem eigenen Beweise versehen. Jene Lehrsätze lassen sich also insofern als zusammengesetzte Lehrsätze betrachten. Wollte man aber dergleichen zusammengesetzte Lehrsätze wirklich zerlegen, und jeden besonders beweisen, so ergäbe sich schon bey einer näheren Betrachtung der obigen Beyspiele, daß in den meisten Fällen die Beweise der einzelnen einfachen Lehrsätze, worein man den zusammengesetzten zer-

---

haben, oder bloß den Winkel an der Spitze, wird das Uebrige nicht zutreffen. Die verbundenen aber sind solche, welche in einfache zerlegt werden können, wie jener Lehrsatz: Die Dreyecke und die Parallelogramme, welche dieselbe Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien. Denn man kann auch zerlegend sagen: Die Dreyecke, welche dieselbe Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien; und von den Parallelogrammen auf die gleiche Weise. Von allen zusammengesetzten aber sind einige in Hinsicht auf den Schluß zusammengesetzt, von derselben Voraussetzung ausgehend; andere aber haben die Zusammensetzung in Hinsicht auf die Voraussetzungen, und setzen allen denselben Schluß; andere aber sind sowohl in Hinsicht auf den Schluß als in Hinsicht auf die Voraussetzungen zusammen gesetzt. Hier [in Euklid Satz 4] nämlich hat die Zusammensetzung in Hinsicht auf den Schluß Statt. Denn in diesem Lehrsatze ist Dreyerley, das zusammen gefolgert wird, daß die Grundlinien [d. h. die dritten Seiten] gleich seyen, daß die Dreyecke gleich seyen, und daß die übrigen Winkel, welche den gleichen Seiten gegen über liegen, gleich seyen. In Hinsicht auf die Voraussetzungen aber [hat die Zusammensetzung Statt] in dem gemeinschaftlichen Lehrsatze der Dreyecke und Parallelogramme, welche dieselbe Höhe haben; und in Hinsicht auf beyde in jenem Satze, die Durchmesser der Kreise nnd Ellipsen theilen sowohl die Flächen, als auch die die Flächen umgebenden Linien in zwey gleiche Theile. Proclus Hervagii p. 66; Barocii p. 139 und 140. — Hauber hat diese Stelle des Proclus in seine Chrestomathie nicht aufgenommen, sondern beschränkt sich, S. 195, auf die Mittheilung dessen, was Savilius darüber sagt).

legt hat, unter einander ihrem größten Theile nach gleichlautend wären. Um z. B. zu beweisen, daß die gerade Linie, welche die Spitzen zweyer auf derselben Grundlinie stehenden gleichschenkligen Dreyecke verbindet, mitten durch die gemeinschaftliche Grundlinie geht, muß man die Congruenz der beyden Dreyecke ADC und BDC (Fig. 8.) darthun, woraus sich dann sogleich die Gleichheit von AD und DB ergibt; und um den andern Theil des zusammengesetzten Lehrsatzes (Lehrbuch §. 48) zu beweisen, daß nämlich jene gerade Linie senkrecht durch die gemeinschaftliche Grundlinie geht, muß man wieder die Congruenz der beyden Dreyecke ADC und BDC darthun, um daraus die Gleichheit der Winkel ADC und BDC abzuleiten. Bis zum Schlusse, daß die Dreyecke ADC und BDC congruent sind, wären also die Beweise der beyden vereinzelten Lehrsätze, (d. i. bey weitem ihrem größten Theile nach) gleichlautend.

Ob vereinbare und zerlegbare Lehrsätze zusammengesetzt oder vereinzelt vorgetragen werden sollen, ist keineswegs Sache der Nothwendigkeit, sondern in wissenschaftlicher Hinsicht durchaus Sache der Willkühr, und in didactischer Hinsicht Sache des Tactes und des Zufalls.*)

Was nun die Form des Beweises zusammen gesetzter Lehrsätze betrifft; so könnte man den Beweis sogleich mit der Zer-

*) Des Zufalls nämlich, insofern der Lehrer augenblickliche Zweck durch die Zusammensetzung oder Vereinzelung erreichen will. — Von der Zusammensetzung der Lehrsätze, von der hier die Rede ist, ist die oben in der Note S. 77 erwähnte wohl zu unterscheiden. Dort wird gesagt, daß ein Lehrsatz ganz aus der Reihe der Lehrsätze ausgelassen werden kann, wenn man den Beweis eines spätern Lehrsatzes, der sich auf ihn beziehen könnte, etwas länger zu machen nicht scheut. Der ausgelassene Lehrsatz erscheint dann ganz und gar nicht in der Proposition des später folgenden Lehrsatzes; sondern die Proposition dieses Lehrsatzes wird ganz einerley ausgesprochen, es mag jener Lehrsatz als Hülfssatz vorausgehen oder nicht.

legung in seine Theile anfangen, und jeden Theil der Propo⸗sition durchaus besonders beweisen (versteht sich, daß man sich im zweyten Theile auf den Beweis des ersten Theils berufen dürfte). So macht es scheinbar Lorenz in seiner Uebersetzung des Euklid, Buch I. Satz 28, und Buch XI. Satz 24; was aber daher rührt, daß er die Exposition und Determination schon mit der Proposition verflochten hat. — Damit ginge aber ein Hauptzweck der Zusammenziehung, nämlich die Abkürzung der Darstellung, verloren. Daher gelten hier vielmehr folgende Regeln:

α) So lange der Beweis für die verschiedenen Theile der Proposition gemeinschaftlich fortschreiten kann, (d. h. ohne auf die Zusammensetzung der Proposition Rücksicht nehmen zu müssen), so lange werden die Theile der Proposition nicht unterschieden.

Bey den Lehrsätzen, bey welchen die Zusammensetzung in der Hypothesis liegt, erstreckt sich nun freylich dieser gemeinschaftliche Gang nicht sehr weit, sondern höchstens nur auf einen Theil der Exposition, z. B. Euklid I. Satz 26 (wo man eine andere Uebersetzung als die von Lorenz, z. B. die von Hauff, nachsehen muß, wenn das Griechische Original nicht zu Gebothe steht). Wenn aber die Zusammensetzung in der Thesis liegt, so trennt sich der Beweis meist nur gegen das Ende der Demonstration. Ein Beyspiel, wo sich der Beweis erst gegen das Ende der Demonstration trennt, wo derselbe gleichsam nur in mehre Conclusionen zerfällt, gibt Euklid I. Satz 4; ferner Lehrbuch §. 48. Ein Beyspiel einer zusammengesetzten Thesis hingegen, wo sich der Beweis schon am Anfange der Demonstration scheidet, liefert Euklid XI. Satz 24.

β) Von da an aber, wo auf die Zusammensetzung der Proposition Rücksicht genommen werden muß, ist es Sache der Willkühr und des Tactes, ob und wie weit man die verschiedenen Theile des Beweises einander will parallel gehen lassen, oder ganz von einander absondern. Z. B. in Euklid I. ist der Satz 28: „Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so ge⸗

schnitten werden, daß der äußere Winkel seinem innern an einerley Seite liegenden Gegenwinkel gleich ist, oder die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zwey rechten gleich sind, so sind die beyden geraden Linien einander parallel", in der Hypothesis zusammen gesetzt. Die beyden Theile des Beweises scheiden sich schon gleich nach dem Anfange der Exposition. Statt nun aber den Rest der Exposition, die Determination und die Demonstration für den einen Theil der Hypothesis, und dann den Rest der Exposition, die Determination und die Demonstration für den andern Theil folgen zu lassen; gibt Euklid den Rest der Exposition für beyde Theile zugleich, dann die Determination für beyde Theile zugleich; hierauf die Demonstration für den ersten und die Demonstration für den zweyten Theil. — Die allgemeine Conclusion zusammengesetzter Lehrsätze spricht bey Euklid, ihrer Bestimmung gemäß, ihren Inhalt wieder für alle Theile des Lehrsatzes gemeinschaftlich aus. *)

*) In meinem Lehrbuche, bey dessen Abfassung übrigens die wissenschaftliche Form der letzte Gesichtspunkt war, erlaubte ich mir folgende Zusammensetzung der Lehrsätze: „Der größern Seite im Dreyeck steht jedesmal auch ein größerer Winkel gegen über, und umgekehrt dem größeren Winkel eine größere Seite." Dieß sind eigentlich zwey von einander ganz verschiedene Lehrsätze, die einander weder in der Hypothesis noch in der Thesis berühren. Der Beweis derselben zerfällt ganz Anfangs gleich in zwey Theile. In Hinsicht auf den Beweis ist also die Zusammensetzung ganz zwecklos. Allein in dem Lehrbuche sind alle indirecten Beweise, insofern sie nur auf einer Umkehrung eines bewiesenen Satzes mittelst einer vom Schüler leicht zu ergänzenden allgemeinen Formel beruhen, ganz ausgelassen worden. Der Satz, daß dem größeren Winkel eine größere Seite gegen über steht, erhält im Lehrbuche keinen Beweis. Die Zusammensetzung der Propositionen beyder Sätze zu einer geschieht also nicht um des Beweises, sondern um der Propositionen selbst willen, da sich beyde sehr verwandte Sätze, von welchen der eine die Umkehrung des andern ist, leicht zusammen denken lassen; etwa so: „Die größere Seite und der größere Winkel stehen einander gegen über." Auch Euklid setzt oft zwey Lehrsätze mit verwandten

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Von den aus mehren Theilen bestehenden Beweisen, von welchen eben die Rede war, sind solche Beweise sehr wohl zu unterscheiden, in welchen man sich auf eine Beachtung mehrer Fälle einlassen muß. Jene haben eine zerlegbare Proposition, so daß, ohne zu den bereits in der Hypothesis ausgesprochenen Bedingungen neue hinzuzufügen, dieselbe sogleich in mehre Propositionen, und damit der ganze Lehrsatz in mehre Lehrsätze zerlegt werden kann. Diese dagegen setzen keine zerlegbare Proposition voraus; sondern eine Unterscheidung mehrer Fälle kann bey ganz unzerlegbaren Propositionen und bey den einzelnen Theilen des Beweises zusammengesetzter Lehrsätze eintreten. Was nun

2) die Beweise betrifft, bey welchen man sich auf eine Unterscheidung mehrer Fälle einlassen muß; so kann eine solche Unterscheidung

α) sogleich im Anfange des Beweises nothwendig werden.

Dieß führt uns auf die Eintheilung der Lehrsätze in allgemeinere und besondere, welche von der obigen Eintheilung in zusammengesetzte und einfache zu unterscheiden ist.

Ein Beyspiel zweyer besondern Lehrsätze ist folgendes: „Parallelepipeda auf einerley Grundfläche und von einerley Höhe, deren Seitenlinien sich in einerley geraden Linien endigen, sind einander gleich" (Euklid XI. 29), und „Parallelepipeda auf einerley Grundfläche und von einerley Höhe, deren Seitenlinien sich nicht in einerley geraden Linien endigen, sind einander gleich" (Euklid XI. 30.). Diese beyden be-

---

Propositionen, bloß dieser Verwandtschaft der Propositionen wegen, zusammen; z. B. VI. Satz 17. „Wenn drey gerade Linien proportionirt sind; so ist das Rectangel aus den äußersten dem Quadrat der mittelsten gleich. Und wenn das Rectangel aus dem äußersten dem Quadrat der mittelsten gleich ist; so sind die drey geraden Linien proportionirt." Dagegen wäre folgende Zusammensetzung abgeschmackt: „In jedem Dreyeck steht dem größeren Winkel eine größere Seite gegen über, und zwey Seiten eines Dreyecks sind zusammen immer größer als die dritte.„

sonderen Lehrsätze lassen sich zu dem allgemeineren Lehrsatz vereinigen: „Parallelepipeda auf einerley Grundfläche und von einerley Höhe sind einander gleich" (Lehrbuch §. 163.) Diese letzte Proposition ist unzerlegbar, wenn man zu den Bedingungen, die in der Hypothesis enthalten sind, nicht noch neue hinzufügt. Unzerlegbar ist sie, weil die Thesis nur Einerley ausspricht, und weil die zwey Bedingungen, welche die Hypothesis enthält, nämlich „einerley Grundfläche" und „einerley Höhe", beyde zugleich Statt finden müssen, damit die Thesis wahr sey. Würde ich aber die Proposition mit Hinzufügung neuer Bedingungen also aussprechen: „Parallelepipeda auf einerley Grundfläche und von einerley Höhe, ihre Seitenlinien mögen sich in einerley geraden Linien endigen oder nicht, sind einander gleich", so ist sie zerlegbar; der Lehrsatz ist zusammengesetzt, und sein Beweis besteht aus zwey Theilen.

Obgleich hieraus schon ein Unterschied zwischen „mehren Theilen eines Beweises" und „mehren Fällen*) in einem

*) „Der Fall (ἡ πτωσις, casus) zeigt verschiedene Weisen der Construction und eine Umänderung der Lage an, indem die Punkte, Linien, Flächen oder Körper anders gesetzt werden. Und zwar zeigt sich die ganze Mannigfaltigkeit desselben nur in Hinsicht auf die Beschreibung der Figur. Daher wird er auch Ptosis genannt, da er eine Versetzung der Construction ist." Proclus Hervagii p. 58; Baroc. p. 121; Hauber p. 180.

„Unter den Aufgaben haben einige keinen Fall, andere haben viele Fälle; wie auch unter den Lehrsätzen. Von denjenigen nämlich, welche dieselbe durch mehre Beschreibungen gehende Kraft haben, und, indem sie die Lagen versetzen, dieselbe Art des Beweises beybehalten, sagt man, daß sie einen Fall haben; diejenigen aber, welche nach einer einzigen Lage und Construction fortgehen, sind ohne Fall. Denn überhaupt sieht man den Fall bey der Construction sowohl der Lehrsätze als Aufgaben." Procl. Herv. p. 61; Baroc. p. 127; Hauber p. 180.

Proklus legt darauf einen Nachdruck, daß man die πτωσις

Beweise" einleuchtet; so könnte gerade bey dem gegebenen Beyspiel ein solcher Unterschied doch sehr gesucht und unwesentlich erscheinen. Allein, wenn die Proposition so ausgesprochen wird: Parallelep. auf einerley Grundfläche und von einerley Höhe, ihre Seitenlinien mögen sich — —"; so zerfällt der Beweis nothwendig in zwey Theile, weil der Beweis in der Exposition alle die Bedingungen aufgreifen muß, die in der Proposition vorkommen. Wird dagegen die Proposition so ausgesprochen: „Parallelepipeda auf einerley Grundfläche und von einerley Höhe sind einander gleich", so ist es nicht nothwendig, daß sich der Beweis in eine Unterscheidung mehrer Fälle einlassen müsse. Denn es lassen sich mancherley Beweise desselben Lehrsatzes denken, von welchen die einen mehre Fälle unterscheiden müssen, während die andern einer solchen Unterscheidung nicht bedürfen. Diejenigen Geometer z. B., welche den Grundsatz aufstellen: „Körper von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe sind gleich, wenn

---

nur bey der Construction bemerke. Die Wahrheit dieser Behauptung ist mir nicht ganz deutlich, indem z. B. der oben S. 96 angeführte 26. Satz des I. Buches Euklids, der gar keine Construction hat, in seiner Proposition auch so ausgedrückt werden könnte, daß der Beweis zwey Fälle unterscheiden müßte. Wenn man nämlich sagte: „Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Winkel einander stückweise gleich sind, und es ist auch eine Seite des einen einer Seite des andern gleich; so sind auch die übrigen Seiten in beyden Dreyecken einander stückweise gleich, u. s. w." so müßten im Beweise die zwey Fälle unterschieden werden: 1) wenn die als gleich vorausgesetzte Seite an den gleichen Winkeln, 2) wenn sie einem derselben gegen über liegt. Sonderbar lautet es auch für uns, wenn Proklus von einer πτωσις (im Singular) spricht, wo wir wenigstens von zweyen Fällen (im Plural) reden. Daß demungeachtet von Proklus unter πτωσις das Nämliche verstanden werde, was oben im Text mit „Fall" bezeichnet wird, darüber s. die nächstfolgende Note.

ihre den Grundflächen parallelen Durchschnitte, in gleicher Höhe genommen, durchgehends einander gleich sind" (wie Kries S. 456), können jenen Satz beweisen, ohne sich in eine Unterscheidung zweyer Fälle einlassen zu müssen. Sie beweisen sogar damit einen noch allgemeineren Satz (denn ein Satz, der in Hinsicht mehrer besonderen Sätze ein allgemeinerer ist, kann in Hinsicht eines anderen, noch allgemeineren Satzes wieder ein besonderer werden), nämlich den: „Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind einander gleich", ohne mehre Fälle zu unterscheiden. Ein anderes Beyspiel eines Lehrsatzes, dessen einer Beweis mehre Fälle unterscheiden muß, während ein anderer nicht, ist Euklid I. Satz 35: „Parallelogramme auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich" (Lehrb. §. 64.). Der Euklidische Beweis, so wie er vor uns liegt, ist als mangelhaft zu tadeln, weil er nicht paßt, wenn die der gemeinschaftlichen Grundlinie gegen über liegenden Seiten der beyden Parallelogramme an einander oder zum Theil auf einander fallen.*) Einen andern vollkommen

---

*) Im Commentar zu diesem Satze Euklids sagt Proklus: „der Verfasser der Elemente bewies den Satz, indem er den schwersten Fall (την χαλεποτεραν πτωσιν) ausgewählt hat." Procl. Herv. p. 104; Baroc. p. 240. — Und am Schlusse desselben sagt Proklus noch einmal, nachdem er gezeigt hat, daß drey Fälle und nicht mehr als drey Fälle Statt finden: „und in Hinsicht aller Fälle (κατα πασας τας πτωσεις) ist der Lehrsatz als wahr bewiesen worden." Procl. Herv. p. 104; Baroc. p. 241. — Hier spricht also Proklus selbst von Fällen in dem Beweise eines Lehrsatzes, der gar keine Construction hat. Vgl. die vorhergehende Note.

Daß Euklid den Beweis nur für einen Fall gegeben hat, läßt sich gewissermaßen dadurch rechtfertigen, daß sich aus diesem Falle der Beweis der übrigen Fälle sehr leicht ergibt. Denn, wenn die der gemeinschaftlichen Grundlinie gegen über liegenden Seiten der beyden Parallelogramme an einander oder zum

richtigen Beweis dieses Lehrsatzes, wobey gar keine Fälle unterschieden werden müssen, gibt Thom. Simpson in seinen Elements of Geometry (Lond. 1800) p. 29. Er ist in unsere Sammlung aufgenommen, und kann daselbst gehörigen Ortes nachgesehen werden. So viel darüber, daß zwischen „mehren Theilen eines Beweises" und „mehren Fällen in einem Beweise" auch dann ein Unterschied Statt findet, wenn die Unterscheidung in mehre Fälle gleich im Anfange des Beweises nothwendig ist.

Der Unterschied selbst liegt aber: a) darin, daß die Unterscheidung in mehre Fälle nicht auf der Natur des Lehrsatzes selbst (oder seiner Proposition), sondern auf der Natur des besonderen Beweises beruht, den man für den Lehrsatz ausgewählt hat, während die Zerlegung in mehre Theile, für den einmal so, und nicht anders, ausgesprochenen Lehrsatz, nothwendig ist, und gar nicht mehr von der Beschaffenheit des Beweises abhängt, mit dem man den Lehrsatz versehen will. Daraus ergibt sich sogleich b) ein zweyter Unterschied, der darin liegt, daß der Beweis, der mehre Fälle unterscheidet, zugleich darthun muß, daß außer den angeführten Fällen keine anderen Fälle mehr Statt finden, indem sonst der Lehrsatz noch nicht allgemein bewiesen wäre, dagegen sich die Zahl der Theile eines Beweises lediglich nach dem richtet, was schon in der Proposition darüber ausgesprochen worden ist, die Proposition selbst aber zu keiner weitern Rechenschaft verpflichtet ist, als daß das, was sie ausspricht, bewiesen werde, unbekümmert, ob außer dem Ausgesprochenen auch noch Anderes bewiesen werden könne oder wahr sey.

Was nun die Form des Beweises betrifft, der gleich im

Theil auf einander fallen, so läßt sich ein drittes Parallelogramm construiren, dessen Seite mit keinem der beyden ersten zusammen fällt; da demnach bewiesen ist, daß ein jedes der beyden ersten dem dritten gleich ist, so sind die beyden ersten auch unter einander gleich.

Anfang mehre Fälle unterscheiden muß, so fängt ein solcher Beweis damit an, daß er die möglichen Fälle auf eine solche Art namhaft macht, daß sogleich in die Augen fällt, wie außer den genannten Fällen kein anderer Fall mehr möglich ist. Wenn z. B. in dem Satz des Lehrbuches §. 111 im Anfange gesagt wird: der Mittelpunkt des Kreises fällt entweder auf einen Schenkel des Peripheriewinkels, oder zwischen die beyden Schenkel des Peripheriewinkels oder außerhalb derselben; so ist (durch die gebrauchten Conjunctionen) sogleich damit ausgesprochen, daß ein vierter Fall nicht möglich; die Wahrheit aber, daß ein vierter Fall nicht möglich ist, wird sehr leicht erkannt, worüber wir uns hier nicht weiter einlassen wollen. — Wie viel man von der Exposition und Determination vorausschicken wolle oder könne, ehe man sich auf die Unterscheidung der Fälle einläßt, hängt theils von unserer Willkühr, theils von der Möglichkeit ab, die für die verschiedenen Fälle nöthigen Figuren übereinstimmend zu bezeichnen.

Merkwürdig ist es, daß in dem sonst so gründlichen Euklid die unumgänglich nothwendige Unterscheidung des Beweises in mehre Fälle sehr häufig übergangen wird, und nur einer oder einige Fälle, Statt aller möglichen, bewiesen werden, z. B. Buch I. 24; Buch III. 20. — Beym 7ten Satze des I. Buches macht es R. Simson sehr wahrscheinlich, daß Euklid ursprünglich die mehren Fälle gehabt habe (Vgl. Hauber a. a. Orte S. 228). Sollte bey andern Beweisen die Schuld einer solchen Ungründlichkeit vielleicht auch auf spätere Verbesserer fallen?

β) Die Unterscheidung in mehre Fälle kann aber auch in den andern Theilen des Beweises nothwendig werden; selbst während der Beweis für einen der Fälle geführt wird, kann man von Neuem mehre Fälle unterscheiden müssen.

Hierüber ist nichts weiter zu bemerken, was sich nicht aus dem Bisherigen von selbst ergäbe. Beyspiele kommen in unserer Sammlung sehr viele vor.

f) von den mehren Theilen eines Beweises und den meh-

ren Fällen in einem Beweise sind wieder die mehren Beweise eines Lehrsatzes zu unterscheiden.

Ein Lehrsatz bedarf nur Eines Beweises, um vollständig begründet zu werden. Daher ist es in einem wissenschaftlichen Systeme der Geometrie ein fast unschicklicher Ueberfluß, wenn derselbe Lehrsatz mit mehren Beweisen versehen wird. Eine geometrische Wahrheit, die, so bald sie einmal bewiesen ist, keinen Zweifel mehr zuläßt, gewinnt durch Vervielfältigung der Beweise nichts an ihrer Glaubwürdigkeit. Wenn hingegen von didactischen Uebungen die Rede ist, bey welchen der Beweis um seiner selbst willen, und nicht bloß als Mittel zur Begründung des geometrischen Lehrsatzes in Betrachtung kommt, kann die Vervielfältigung der Beweise ein brauchbares Material des Unterrichts abgeben. Darin findet denn auch die Aufnahme mehrer Beweise desselben Lehrsatzes und mehrer Auflösungen derselben Aufgabe in unsere Sammlung ihre Rechtfertigung.

Die Vorzüge, die ein Beweis vor dem andern hätte, können also auch ganz und gar nicht darin liegen, daß der eine richtiger als der andere ist. Denn ein Beweis, der weniger richtig als ein anderer wäre, wäre gar nicht richtig, und hörte mithin auf ein Beweis zu seyn. Die Vorzüge eines Beweises vor einem andern können also, (wenn sich gleich ein Beweis von einem andern in sehr wesentlichen Dingen unterscheiden kann*) nicht in wesentlichen, sondern nur in unwesentlichen Dingen, in gewissen Aeußerlichkeiten, oder in der Form bestehen. Ein Beweis spricht uns mehr an als ein anderer, weil er kürzer, weil er anschaulicher, weil er leichter zu fassen ist, weil er sich auf eine Unterscheidung mehrer Fälle nicht einlassen muß, weil er weniger Vorkenntnisse voraussetzt.

---

*) Wie das zugeht, darüber siehe Lambert Neues Organon. I. S. 215.

Es ist hier kein unschicklicher Ort, zweyer Eintheilungen der Beweise zu erwähnen, nämlich der Eintheilung in directe und indirecte, und der Eintheilung in synthetische und analytische Beweise.

1) Die indirecten Beweise unterscheiden sich von den directen durch die Form der Vernunftschlüsse, die man in denselben anwendet *). Siehe oben die Note zu S. 72.

---

*) Proklus sagt in seinen Bemerkungen zum 6ten Euklidischen Satze über die indirecten oder apagogischen Beweise Folgendes: „Die Deductionen zum Unmöglichen (ἀι ἐις 'αδυνατον ἀπαγωγαι, deductiones ad impossibile, bekannter unter dem Nahmen deductiones ad absurdum, ἀι ἐις ἀτοπον 'απαγωγαι) gehen immer auf ein offenbar Unmögliches aus, und dessen Entgegengesetztes (το ἀντικειμενον) zugestanden wird; es geschieht aber, daß einige derselben auf Etwas ausgehen, das den Axiomen oder den Postulaten oder den Erklärungen (ταις κοιναις ἐννοιαις η τοις ἀιτημασιν η ταις ὑποθεσεσι, vgl. oben S. 47.) widerstreitet; andere aber auf Etwas, das den vorher bewiesenen Sätzen widerspricht. Denn dieser sechste Lehrsatz zeigt, daß das Gefolgerte unmöglich ist, weil es den Grundsatz umstößt, welcher behauptet, daß das Ganze größer als der Theil sey. Der achte aber gelangt zum Unmöglichen, das hier nicht einen allgemeinen Grundsatz, sondern das durch den siebten Lehrsatz Bewiesene umstößt. Denn, was der siebte verneint hat, das zeigt jener denjenigen als bejaht, welche das Gesuchte [die Thesis, vgl. oben S. 91.] nicht zugestehen. Eine jede Deduction zum Unmöglichen übrigens schreitet, indem sie das dem Gesuchten Widerstreitende annimmt, und dieses voraussetzt, weiter, bis sie zu dem anerkannt Widersinnigen (το 'ατοπον, absurdum) gelangt, und, dadurch die Voraussetzung aufhebend, das im Anfang Gesuchte bestätigt. Denn überhaupt muß man wissen, daß alle mathematischen Begründungen entweder von den Prinzipien ausgehen, oder zu den Prinzipien zurück führen ('η 'απο των 'αρχων εισιν, 'η 'επι τας 'αρχας), wie auch Porphyrius [Zeitgenosse des Astronomen Ptolemäus,

In wissenschaftlicher Hinsicht haben die indirecten Beweise ganz denselben Werth, welchen die directen haben. Die Wahrheit der Proposition wird durch die eine Art des Beweises eben so gut als durch die andere begründet. Allein in didactischer Hinsicht hat im Allgemeinen der directe Beweis, für sich betrachtet, folgenden deutlich auszusprechenden Vorzug vor dem indirecten: der directe Beweis, der nicht ganz kurz ist, enthält in seinem Verlaufe eine Menge von Schlußsätzen, die für sich als Lehrsätze gelten können, und die für den Lernenden einen Zuwachs geometrischer Kenntnisse abgeben *); dagegen enthält

im zweyten Jahrhundert nach Christus. Montucla I. p. 310.] sagt. Und zwar sind die von den Prinzipien ausgehenden doppelter Art: denn entweder fließen sie aus den Grundsätzen und aus der bloßen in sich selbst begründeten Evidenz, oder aus vorher bewiesenen Sätzen; die zu den Prinzipien zurückführenden aber sind entweder von der Art, daß sie die Prinzipien setzen, oder daß sie sie aufheben. Die die Prinzipien setzenden aber werden Analysen (ἀναλυσεις) genannt; diesen sind die Synthesen (αἱ συνθεσεις) entgegengesetzt; es ist nämlich möglich, von jenen Prinzipien in vollkommener Ordnung bis zu dem Gesuchten fortzuschreiten, und dieses ist die Synthesis. Die aufhebenden werden Deductionen zum Unmöglichen genannt. Denn etwas von dem Zugestandenen und Klaren umzustoßen, ist das Geschäft dieser Untersuchung. Auch findet bey ihr ein gewisser Vernunftschluß Statt, aber nicht der nämliche wie bey der Analyse. Denn bey den Deductionen zum Unmöglichen geschieht das Schließen nach der zweyten Art der hypothetischen Schlüsse. Zum Beyspiel, Wenn in den Triangeln, welche gleiche Winkel haben, die den gleichen Winkeln gegen über liegenden Seiten nicht gleich sind, so ist das Ganze seinem Theile gleich. Aber dieses ist unmöglich. Es sind also auch in Triangeln, welche zwey gleiche Winkel haben, die den gleichen Winkeln gegen über liegenden Seiten selbst einander gleich. So viel über die bey den Geometern so genannte Deduction zum Unmöglichen." Proclus Herv. p. 68 und 69; Barocii p. 145 und 146; Hauber p. 210 und 211.

*) Der Euklidische Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes z. B.

der indirecte Beweis, der nicht ganz kurz ist, viele Schlußsätze, die falsch sind, weil die Voraussetzungen falsch sind. Diese Schlußsätze werden hier freylich vorweg schon als falsch anerkannt, obgleich ihre Falschheit erst durch die wirkliche deductio ad absurdum bewiesen wird, es ist also keine Gefahr dabey, daß der Lernende etwas Falsches aufnehme; aber, wenn er auch nichts Falsches lernt, so lernt er dabey doch auch nichts Wahres. Die indirecten Beweise sind also unfruchtbarer an geometrischen Wahrheiten, als die directen; und diese geringere Fruchtbarkeit fällt um so mehr auf, je länger die Beweise sind.

Wenn man die directen und indirecten Beweise für sich betrachtet, so hat, wie gesagt, in didactischer Hinsicht der directe Vorzüge vor dem indirecten. In einem Systeme der Geometrie aber können häufig (und zwar auch beym Unterrichte) indirecte Beweise zweckmäßiger angewandt werden, als directe. Namentlich ist dieses der Fall, wenn ein Lehrsatz bewiesen wird, der eine so genannte Umkehrung eines früher vorgekommenen Lehrsatzes ist *). Hier läßt sich die Begründung

---

enthält in sich noch die Lehrsätze: daß, wenn man auf den beyden Katheten eines rechtwinkligen Dreyecks Quadrate beschreibt, die Katheten mit den bewußten Quadratseiten in gerader Linie liegen; ferner, daß durch die gerade Linie, welche man aus dem Scheitelpunkt des rechten Winkels auf die bewußte Art parallel zieht, das Quadrat der Hypotenuse in zwey Rechtecke zerfällt, deren eines dem einen Kathetenquadrate, und das andere dem andern Kathetenquadrate gleich ist; u. s. w.

*) Was man unter einer Umkehrung (’αντιστροφη, conversio) zu verstehen habe, lernt man sehr gut aus dem, was Proklus in seinen Bemerkungen zum 6ten Euklidischen Satze darüber sagt: „Die Umkehrung heißt bey den Geometern vorzugsweise und eigenthümlich, wenn die Lehrsätze die Schlüsse und Voraussetzungen [Thesis und Hypothesis, s. oben S. 91.] von einander wechselseitig annehmen, und zwar der Schluß des ersten die Voraussetzung des zweyten, die Voraussetzung aber als Schluß beygesetzt wird. Zum Beyspiel, In gleichschenkligen

des späteren Lehrsatzes meistens am leichtesten und natürlichsten durch eine deductio ad absurdum, mit Hülfe des früheren,

---

Dreyecken sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; Voraussetzung ist hier, daß das Dreyeck gleichschenklig ist, Schluß aber die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie. Und, Die Dreyecke, deren Winkel an der Grundlinie einander gleich sind, sind gleichschenklig; was nun der sechste Lehrsatz sagt, der zur Voraussetzung macht, daß die Winkel an der Grundlinie einander gleich seyen, zum Schluß aber die Gleichheit der Seiten, die jenen gleichen Winkeln gegen über liegen.

Eine andere Umkehrung findet aber bloß in Rücksicht auf eine gewisse Veränderung der zusammen gesetzten Lehrsätze Statt. Denn wenn ein Lehrsatz zusammen gesetzt ist, indem er mit mehren Voraussetzungen anfängt und in Einen Schluß endigt; so nehmen wir den Schluß und eine der Voraussetzungen oder auch mehre an, und bringen eine der übrigen Voraussetzungen als Schluß bey. Und auf diese Weise ist aus dem vierten Lehrsatze der achte umgekehrt. Denn jener sagt, zu gleichen Seiten und [eingeschlossenen] Winkeln gehören gleiche Grundlinien; dieser aber, Gleiche Seiten, die auf gleichen Grundlinien liegen, enthalten gleiche Winkel zwischen sich; hier war das „auf gleichen Grundlinien" der Schluß des andern, das „die darauf liegenden gleichen Seiten" aber eine von den in jenem angenommenen Voraussetzungen; jenes aber „enthalten gleiche Winkel zwischen sich" war in jenem die andere Voraussetzung [Der letzte Satz: „jenes aber — — — Voraussetzung" fehlt im Griechischen Text des Hervagius, steht aber in der Lateinischen Uebersetzung des Barocius].

Von diesen zwey Umkehrungen, die demnach Statt finden, ist die eine, die vorzugsweise, einförmig und bestimmt; die andere aber ist mannigfaltig, und gelangt zu einer großen Zahl von Lehrsätzen, indem sie nicht bloß einen in einen umkehrt, sondern einen in viele, wegen der Menge der Voraussetzungen in zusammen gesetzten Lehrsätzen. Oft gibt es aber auch von einem Lehrsatze, der mit zweyen Voraussetzungen anfängt, nur Einen umgekehrten, wenn die Voraussetzungen nicht alle bestimmt, sondern einige unbestimmt sind [Der letzte Satz ist aus Barocius; der Griechische Text des Hervagius ist corrupt. Was

bewerkstelligen. Jetzt kommen zwey Lehrsätze in eine Art von Beziehung zu einander, und da ist es am passendsten (wiewohl

---

übrigens Proklus unter bestimmten und unbestimmten Voraussetzungen (ὑποθεσεις ὡρισμεναι und ἀοριστωδεις, suppositiones determinatae und indeterminatae) versteht, ist mir nicht klar]. Man muß aber auch bey denselben darauf Acht haben, daß viele Umkehrungen falsch werden und keine eigentlichen Umkehrungen sind, wie, Eine jede sechseckige Zahl ist eine dreyeckige, das Umgekehrte ist nicht auch wahr, daß eine jede dreyeckige Zahl eine sechseckige sey [der Satz „das Umgekehrte — — sey" fehlt wieder im Hervagius; Barocius hat ihn. — Die Reihe der dreyeckigen Zahlen heißt: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 u. s. w., und die Reihe der sechseckigen heißt: 1, 6, 15, 28, 45, 66 u. s. w.] Der Grund aber ist, daß das Eine genereller und das Andere specieller ist. — — — Von diesen sich umkehrenden Lehrsätzen aber pflegt man die einen die vorangehenden und die andern die umgekehrten zu nennen. Denn wenn sie, eine gewisse Gattung voraus setzend, die derselben zukommende Eigenschaft beweisen, so nennt man diesen einen vorangehenden; wenn sie hingegen zur Voraussetzung die Eigenschaft, und zum Schluß die Gattung machen, der die Eigenschaft zukommt, so nennt man solchen einen umgekehrten. Zum Beyspiel, Ein jedes gleichschenklige Dreyeck hat gleiche Winkel an der Grundlinie, dieß ist der vorangehende; es wird nämlich zum Grunde gelegt, was der Natur nach vorausgeht, nämlich die Gattung, das gleichschenklige Dreyeck selbst. Ein jedes gleichschenklige Dreyeck, das zwey gleiche Winkel hat, hat auch die gegen über liegenden Seiten gleich, und ist gleichschenklig; dieß ist der umgekehrte. Denn er vertauscht das zum Grund gelegte (το ὑποκειμενον, subjectum) und die Eigenschaft desselben (το παθος, passionem); und zwar setzt er diese voraus, und zeigt jenes aus dieser. So viel haben wir über die geometrischen Umkehrungen zu sagen." Proclus Herv. p. 68; Baroc. p. 143—145; Hauber p. 205—210.

Sehr richtig bemerkt Hauber (l. c. p. 209.), daß die letzte Unterscheidung zwischen vorangehenden und umgekehrten Lehrsätzen nicht gegründet ist. Seine Einwürfe dagegen führt er vollstän-

das Gegentheil kein Fehler oder Mangel ist), daß auch der Beweis des späteren Lehrsatzes diese Beziehung ausdrücke.

Was nun die Form der indirecten Beweise betrifft, so ist die von Proklus angegebene Abtheilung des Lehrsatzes in sechs Theile (s. oben S. 62.) nicht mehr so ganz rein vorhanden. Die Exposition, Determination und Construction der directen Beweise nämlich unterscheiden sich von der Demonstration dadurch, daß sie keine Vernunftschlüsse enthalten, während die Demonstration auf der einen Seite ein ganzes System von Vernunftschlüssen ist, zu welchem die Exposition und Construction einen großen Theil der Vordersätze liefern, auf der andern Seite aber keine weiteren Voraussetzungen zu Hülfe nimmt, die nicht schon in der Exposition und Construction ausgesprochen worden wären. Die indirecten Beweise enthalten aber jedesmal noch einen Satz, welchen wir auf Veranlassung des Savilius (s. Hauber l. c. p. 216.) vorzugsweise den Prosyllogismus des Beweises nennen wollen, der nach der Determination steht,

---

dig an. In der That ist es einerley, welchen von den beyden Lehrsätzen, von welchen der eine die Umkehrung des andern ist, man vorangehen lassen will.

Ich erinnere mich, irgendwo in Lambert's gedrucktem Briefwechsel eine Bemerkung dieses großen Mathematikers und Logikers gelesen zu haben, daß die Umkehrungen bereits erfundener Sätze sehr fruchtbar zu neuen Erfindungen benutzt werden können. — Auch außer dem Gebieth der Mathematik war z. B. die Erfindung des Blitzableiters eine Umkehrung des Satzes, daß das Metall ein guter Leiter der Electricität ist. — In einem Buche, das dem geometrischen Unterrichte gewidmet ist, verdiente also die Lehre von der Umkehrung der Lehrsätze einen umständlicher und ausführlicher sich verbreitenden Abschnitt. Allein, da das Verhältniß zweyer Lehrsätze, von denen der eine die Umkehrung des andern ist, gar keinen nothwendigen Einfluß auf die Form der Propositionen und ihrer Beweise hat (wovon doch zunächst jetzt allein die Rede ist); so enthält die Stelle aus Proklus Alles, was hier über die Umkehrung der Lehrsätze gesagt werden mußte.

und eben sowohl von dem Character der Construction abweicht, weil er einen Vernunftschluß enthält, als von dem Character der Demonstration, indem er unter seinen Theilen eine neue Voraussetzung ausspricht, die in der Exposition nicht selbst, sondern deren Gegentheil darin vorgekommen war *).

Indirecte Beweise in unsere Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze aufzunehmen, lag außer dem Zweck derselben. Wenn der Lehrer dergleichen als Material seines Unterrichtes bedarf, so findet er sie im Ueberflusse in Euklids Elementen; und er wird nicht leicht in die Verlegenheit gerathen, in dem Beweise auf Vordersätze zu stoßen, die in seinem Unterrichte noch nicht vorgekommen und bewiesen sind, wenn der umgekehrte Lehrsatz mit seinem directen Beweise voraus gegangen ist.

2) Der Unterschied zwischen synthetischen und analytischen Beweisen ist dem Unterschied zwischen synthetischer und analytischer Methode, in der Mathematik überhaupt, ganz entsprechend. In den synthetischen Beweisen fängt man die Demonstration mit Schlüssen aus bereits begründeten (oder wenigstens zugegebenen, vgl. oben S. 80.) Vordersätzen an, und der letzte Schluß, den man macht, ist der Determination gleichlautend. In der Demonstration der analytischen Beweise befolgt man den umgekehrten Gang. Der Schlußsatz, der be-

*) In dem oben in der Note S. 62. mitgetheilten zweyten Beyspiel ist der Prosyllogismus folgender: „Denn, wenn nicht; so ist die AC der AB entweder gleich oder größer als dieselbe." Da in diesem Beyspiel die Construction fehlt; so steht der Prosyllogismus (Prosyllogismus heißt eigentlich in einer Schlußkette ein jeder Vernunftschluß, dessen Schlußsatz Prämisse eines folgenden Schlusses, eines Episyllogismus, wird; in dieser Bedeutung kann also jeder Beweis, er mag direct oder indirect seyn, viele Prosyllogismen enthalten) im Anfange der Demonstration. In indirecten Beweisen, welche eine Construction haben, steht der Prosyllogismus im Anfange der Construction, z. B. in Euklid I. Satz 6, (vgl. Hauber l. c. p. 146).

wiesen werden soll, wird als richtig voraus gesetzt, und als Vordersatz zu Schlußsätzen gebraucht, und dieß so fort, bis man endlich durch fortgesetztes Schließen auf Sätze gelangt, die bereits begründet sind. Ein solcher analytischer Beweis ist gründlich, und erreicht seinen Zweck vollkommen. Er ist seinem Inhalte nach gar nicht von dem synthetischen Beweise verschieden; nur der Form nach unterscheidet er sich darin von diesem, daß in ihm die Sätze in umgekehrter Ordnung folgen.

In einem niedergeschriebenen Systeme der Geometrie scheint der synthetische Beweis schicklicher als der analytische. Wir nannten oben (S. 76.) den Lehrsatz eine Unterbrechung des rein synthetischen Vortrags der Geometrie, und die Proposition des Lehrsatzes gleichsam eine Ueberschrift über das engere System von Vernunftschlüssen, das man ihr als Beweis hinzufügt. Wenn die Beweise alle synthetisch geführt werden, so bleibt das Gebäude der Geometrie noch ein geordnetes Ganze, wenn man auch diese Ueberschriften, oder Propositionen der Lehrsätze, alle wegläßt *). Dieß wäre nicht mehr der Fall, wenn man sich in einem solchen Systeme der Geometrie der analytischen Beweise bedient hätte.

Auf der andern Seite haben die analytischen Beweise das Empfehlenswerthe, daß sie

a) wenn man sich die Propositionen der Lehrsätze eines Systems der Geometrie im Gedächtnisse gemerkt hat, leichter im Gedächtnisse zu behalten sind, als die synthetischen, weil sich der Gang des Beweises unmittelbar an die Thesis der Proposition anknüpft. Um den Gang eines, nicht ganz kurzen, synthetischen Beweises zu behalten, um in denselben keine überflüssigen Sätze aufzunehmen, und keine nothwendigen auszulassen, gibt es auch kaum ein anderes zweckmäßiges Mittel,

*) Es versteht sich von selbst, daß man bey einem etwaigen Versuche die Propositionen wegzulassen, die Theile des Beweises, die nur Recapitulation der Proposition sind, gehörig modificiren müßte.

als daß man sich die hauptsächlichsten Schlußsätze merkt, die dem letzten Schlußsatz des Beweises zu unmittelbaren oder mittelbaren Vordersätzen dienen; indem man sich aber diese merkt, thut unser Verstand wirklich nichts anders, als daß er sich den Beweis in analytischer Anordnung denkt.

b) Findet die analytische Beweisart beym Selbstfinden der Beweise als wahr angenommener Lehrsätze ausschließlich Anwendung. Kommt man, indem man den Satz, den man beweisen will, als wahr ansieht, auf Sätze, deren Wahrheit bereits erkannt ist, so ist der Satz selbst wahr, und seine Wahrheit ist bewiesen. Käme man hingegen auf falsche Sätze, so wäre der angenommene Lehrsatz selbst falsch, und derselbe könnte folglich nicht bewiesen werden. Klügel drückt sich in seinem mathematischen Wörterbuche s. v. „Analysis, als Methode," (I. p. 89.) so aus: „Die theoretische Analysis, deren Pappus erwähnt, wird kaum anders brauchbar seyn, als bey der Prüfung eines Satzes, den ein Schriftsteller aufstellt oder anwendet, ohne ihn zu beweisen. Denn man wird nicht leicht durch Vermuthung auf einen mathematischen Satz gerathen." In dieser letzten Behauptung hat Klügel offenbar Unrecht. Denn der gewöhnliche Gang aller Erfindungen, nicht nur in der Mathematik, sondern auch in allen Wissenschaften und im Leben (wenn sie nicht, wie die des Schießpulvers, durch reinen Zufall geschehen sind), fängt mit Vermuthungen an. Die Erfindung der Sache gründet sich gewöhnlich auf einen glücklichen Einfall, und die Prüfung dieses Einfalls, sey es durch Versuche oder durch Beweise, pflegt meistens erst hinterher zu kommen. Der Erfinder des Pythagoräischen Lehrsatzes, um bey einem Beyspiele aus der Geometrie stehen zu bleiben, hat sicherlich zuerst vermuthet, daß das Quadrat der Hypotenuse den Quadraten der beyden Katheten zusammen genommen gleich sey, ehe er den Beweis erdachte.

Abgesehen aber von geometrischen Erfindungen, durch welche die Wissenschaft wirklich bereichert wird, hat die analytische Beweisart einen vorzüglich großen pädagogischen oder didacti-

schen Werth. Sie eignet sich nicht nur, um mich kurz zu fassen, zum heuristischen Vortrage von Seiten des Lehrers, sondern auch zu heuristischen Uebungen der Schüler, welchen die Erfindung des Beweises eines vom Lehrer als wahr ausgesprochenen Lehrsatzes aufgegeben werden kann.

Euklid bedient sich in seinen Elementen durchaus der synthetischen Beweisart. Nur die fünf ersten Sätze des XIII Buches hat er außer dem synthetischen Beweise noch mit einer Analysis versehen *); gerade als habe er hiermit dem Lernen-

---

*) Den ersten dieser fünf Sätze setze ich in vollständiger Uebersetzung her (Eucl. Herv. p. 239.):

„Wenn eine gerade Linie nach äußerem und mittlerem Verhältniß [nach stetiger geometrischen Proportion] geschnitten wird, so ist das Quadrat des um die Hälfte der ganzen Linie verlängerten größeren Abschnittes das Fünffache vom Quadrat der Hälfte der ganzen Linie.

Denn es werde die gerade Linie AB (Fig. 5.) nach äußerem und mittlerem Verhältniß geschnitten, im Punkte C, und es sey AC der größere Abschnitt [so daß sich also BC : AC = AC : AB verhält]. Ferner werde die gerade Linie AC verlängert und AD der Hälfte von AB gleich gemacht; so behaupte ich, daß das Quadrat von CD das Fünffache des Quadrats von AD ist.

Man beschreibe auf AB und DC die Quadrate AE und DF, verzeichne in DF die Figur, und verlängere FC nach G.

Da die AB in C nach äußerem und mittlerem Verhältniß geschnitten ist, so ist das Rechteck zwischen AB und BC dem Quadrat von AC gleich. Es ist aber das Rechteck zwischen AB und BC dem CE, und das Quadrat von AC dem HF gleich. Also ist CE gleich HF.

Da die AB das Doppelte der AD, ferner die AB der KA und die AD der AH gleich ist, so ist auch die KA das Doppelte der AH.

Wie sich aber die KA zur AH verhält, so verhält sich das Rechteck KC zu HC; also ist KC das Doppelte von HC.

Es sind aber auch LH und HC das Doppelte von HC; also ist KC gleich LH und HC.

Es ist aber bewiesen worden, daß auch CE gleich HF ist.

den ein Paar Beyspiele der analytischen Beweisart geben wollen. Denn da ein gründlicher Beweis mit Beyhülfe der

---

Also ist das ganze Quadrat AE dem Gnomon MNO gleich

Da aber AB das Doppelte von AD ist, so ist das Quadrat von AB das Vierfache des Quadrats von AD, oder AE ist das Vierfache von DH.

Es ist aber AE dem Gnomon MNO gleich; also ist der Gnomon MNO das Vierfache von DH.

Also ist das Ganze DF das Fünffache von DH.

Es ist aber DF das Quadrat von CD, und DH das Quadrat von DA.

Folglich ist das Quadrat von CD das Fünffache des Quadrats von DA.

Wenn also eine gerade Linie nach äußerem und mittlerem Verhältniß geschnitten wird, so ist das Quadrat des um die Hälfte der ganzen Linie verlängerten größeren Abschnittes das Fünffache des Quadrats der Hälfte. Was zu beweisen war.

Anmerkung. Was Analysis und Synthesis sey. Die Analysis ist das Verfahren, nach welchem man das Gesuchte als zugestanden annimmt, und durch daraus gezogene Folgerungen auf etwas wahres Zugestandenes kommt. Die Synthesis aber ist das Verfahren, da man das Zugestandene zum Grunde legt, und durch die daraus gezogenen Folgen zu dem Schlusse oder der Darstellung des Gesuchten gelangt [Die Uebersetzung dieser beyden Sätze entlehne ich von Mollweide, welcher die dritte Ausgabe (Halle 1809) der bekannten Lorenzischen Uebersetzung besorgt hat, obgleich sie, wenigstens nach der mir vorliegenden Griechischen Ausgabe des Euklid nicht sehr wörtlich ist. Ich wußte sie nicht besser zu geben].

Des ausgesprochenen Lehrsatzes Analysis.

Es sey die gerade Linie AB (Fig. 6.) in C nach äußerem und mittlerem Verhältniß geschnitten, AC sey der größere Abschnitt, und der Hälfte von AB gleich sey AD angesetzt; so behaupte ich, daß das Quadrat von CD das Fünffache des Quadrats von AD ist.

Denn da das Quadrat von CD das Fünffache des Quadrats von AD ist, das Quadrat von CD aber den Quadraten von AC und AD nebst dem doppelten Rechteck zwischen AC und

Zeichnung (wie Fig. 5.) nach der bisher allein angewandten Methode gegeben war; so ist der zweyte Beweis mittelst der Analysis, zur Begründung des Satzes, ganz überflüssig. Bemerkenswerth ist es, daß, so wie der analytische Beweis

---

AD gleich ist, so sind die Quadrate von AC und AD nebst dem doppelten Rechteck zwischen AC und AD das Fünffache des Quadrats von AD. Nimmt man weg, so ist also das Quadrat von AC nebst dem doppelten Rechteck zwischen AC und AD das Vierfache des Quadrats von AD. Aber dem doppelten Rechteck zwischen AC und AD ist das Rechteck zwischen AB und AC gleich; denn AB ist das Doppelte von AD. Und dem Quadrat von AC ist das Rechteck zwischen AB und BC gleich; denn AB ist nach äußerem und mittlerem Verhältniß geschnitten. Also ist das Rechteck zwischen AB und AC nebst dem Rechteck zwischen AB und AC das Vierfache des Quadrats von AD. Aber das Rechteck zwischen AB und AC nebst dem Rechteck zwischen AB und BC ist das Quadrat von AB. Also ist das Quadrat von AB das Vierfache des Quadrats von AD. Dieß ist es auch in der That, da AB das Doppelte von AD ist.

Synthesis.

Da das Quadrat von AB das Vierfache des Quadrats von AD, aber auch das Quadrat von AB dem Rechteck zwischen AB und AC nebst dem Rechteck zwischen AB und BC gleich ist; so ist das Rechteck zwischen AB und AC nebst dem Rechteck zwischen AB und BC das Vierfache des Quadrats von AD. Aber das Rechteck zwischen AB und AC ist dem doppelten Rechteck zwischen AD und AC, und das Rechteck zwischen AB und BC dem Quadrat von AC gleich. Also ist das Quadrat von AC, nebst dem doppelten Rechteck zwischen AD und AC, das Vierfache des Quadrats von AD. Folglich sind die Quadrate von AD und AC nebst dem doppelten Rechteck zwischen AD und AC das Fünffache des Quadrats von AD. Die Quadrate von AD und AC nebst dem doppelten Rechteck zwischen AD und AC sind aber das Quadrat von DC. Folglich ist auch das Quadrat von DC das Fünffache des Quadrats von AD. Was zu beweisen war."

vollständig durchgeführt ist, sogleich die Umkehrung desselben als Synthesis folgt; indem es scheint, als wenn die alten Geometer diese sogenannte Analysis und Synthesis zusammen nur als Einen vollständigen Beweis, oder vielmehr den synthethischen Beweis als unerläßlich und die Voransendung der Analysis nur als Sache der Methode (um den Weg anzuzeigen, wie man zur Erfindung gelangen konnte, und demnach in ähnlichen andern Fällen gelangen kann) oder als eine in Hinsicht auf wissenschaftliche Begründung überflüßige Zugabe betrachtet hätten*). In unserer Sammlung geometrischer Aufgaben und

---

*) Was Proklus über die Analysis sagt, ist unbedeutend und durfte es seyn, da sich sein Commentar nur über das erste Buch Euklids erstreckt. (S. oben Note zu S. 105). An einer andern Stelle nennt er Plato als den Erfinder derselben. (Procl Herv. p. 58; Baroc. p. 120 und 121). Sehr klar aber spricht Pappus darüber in der Vorrede zu dem 7ten Buche seiner mathemathematischen Sammlungen. Ich würde die Uebersetzung der Stelle hierher setzen, wenn ich nicht darüber auf Klügel's mathematisches Wörterbuch (I. S. 87 und 88) verweisen könnte. Pappus unterscheidet zwischen der theoretischen und problematischen Analysis; jene sucht den Beweis von Lehrsätzen (von ihr war im Obigen die Rede), diese die Auflösung von Aufgaben. Von dieser letzten könnte weiter unten, wo von den Aufgaben insbesondere gehandelt wird, die Rede seyn, wnen ich nicht vermeiden wollte, noch einmal auf diesen Gegenstand zurück zu kommen. In Hinsicht auf ihre vorzügliche Anwendbarkeit beym Unterrichte gilt (nur fast in noch höherem Grade) das Nämliche, was ich oben S. 113 über die empfehlenswerthen Eigenschaften der analytischen Beweise gesagt habe. Ich war lange unentschieden, ob ich dergleichen Analysen nicht in unsere Sammlung aufnehmen sollte. Allein 1) die Hauptbestimmung der in die Sammlung aufgenommenen Aufgaben und Lehrsätze geht doch auf Materialien zu schriftlichen Aufsätzen, dagegen die Analyse mehr Sache des Nachdenkens und des mündlichen Vortrags ist; 2) ist es dem Leser ein Leichtes, die Analyse selbst zu machen, wenn ihm die synthetische Auflösung gegeben ist, und er überhaupt einen Begriff von dieser Methode hat; 3) diese

Lehrsätze, bey welchen namentlich auch noch keine Anwendung der Algebra gemacht wird, abstrahiren wir gänzlich von dem analytischen Gange in den Auflösungen und Beweisen.*) Wir

---

Methode kennen zu lernen, und sich Uebung darin zu verschaffen, haben wir sehr vielei leicht zu erwerbende Hülfsmittel. Unter diesen empfehle ich

Geometrische Analysis von John Leslie. Aus dem Engl. übers. und sehr vermehrt von J. P. Grüson. Berlin 1822.

Apollonius von Pergen ebene Oerter. Wiederhergestellt von Robert Simson. Aus dem Lateinischen übers. von J. W. Camerer. Leipz. 1796.

Euklids Data, verbessert und vermehrt von Robert Simson, aus dem Englischen übersetzt, und mit einer Sammlung geometrischer, nach der analytischen Methode der Alten aufgelöster Probleme begleitet, von J. C. Schwab. Stuttg. 1780. (Schade, daß dieses letzte Buch im Buchhandel nicht mehr zu haben ist).

Ich könnte noch mehre empfehlen, wenn ich nicht aus Erfahrung wüßte, daß eine im Ueberfluß genannte Zahl von Schriften dem Zweck ihrer Nennung mehr hinderlich als förderlich ist.

So leicht es ist, die Analyse zu machen, wenn man die synthetische Auflösung vor sich hat (sey es, daß man sich selbst den Zusammenhang der Auflösung anschaulicher, oder daß man davon als Lehrer Anwendung zu einer methodischen Mittheilung machen wolle); so wenig lassen sich bestimmte Vorschriften zur Auflösung von noch unaufgelösten Aufgaben mittelst der Analyse geben. Man lese, was Klügel darüber a. a. O. l. S. 90 und 91 sagt.

*) Die Anwendung unserer Algebra auf die Geometrie darf mit der Analysis der Alten nicht verwechselt werden. Ueber die erste wird in der Einleitung zu dem zweyten Theile der Sammlnng geometrischer Aufgaben und Lehrsätze, welcher solchen Aufgaben gewidmet ist, d:e mit Hülfe der Algebra gelöst werden, mehr vorkommen. Die Anwendung der Algebra auf die Geometrie ist wieder von der Anwendung synthetischer Rechnungsregeln, (als der Regeln der gemeinen Buchstabenrechnung) wesentlich verschieden. Eine Algebra, wie wir, haben die Alten nicht angewandt, weil sie sie nicht gehabt haben. Die Geschichte nennt

beschränken uns bloß auf den synthetischen Gang, und halten uns daher hier über die Form der Lehrsätze mit analytischen

---

erst den Diophantus von Alexandrien, der 365 Jahre nach Chr. lebte, als Erfinder derselben (Montucla a. a. O. I. S. 315). Von den Regeln der synthetischen Rechnungsoperationen machten sie keinen Gebrauch, um nicht gegen die einmal für richtig oder zweckmäßig gehaltene Methode zu verstoßen. Um z. B. den Satz (Eukl. II. 4.) zu beweisen, daß das Quadrat einer aus zwey Theilen AC und CB bestehenden geraden Linie AB den Quadraten der beyden Abschnitte nebst dem doppelten Rechtecke zwischen beyden Abschnitten gleich ist, beschrieben sie (Fig. 7) über AB wirklich ein Quadrat, u. s. w. Wir dagegen setzen folgendes Multiplications-Exempel an

$$\begin{array}{l} AC + CB \\ AC + CB \\ \hline AC^2 + AC \times CB \\ \quad\;\; + AC \times CB + CB^2 \\ \hline AC^2 + 2\,AC \times CB + CB^2 \end{array}$$

Die Richtigkeit unsers Verfahrens beruht darauf, daß die Längen von Linien den entsprechenden Zahlen proportional sind, daß sich die über jenen Linien beschriebenen Quadrate wie die Quadratzahlen dieser Zahlen, und die aus zwey Linien beschriebenen Rechtecke wie die Producte der den Linien entsprechenden Zahlen verhalten. Die Alten haben die Anwendung dieser Sätze in ihren geometrischen Lehrbüchern vermieden. Das war in wissenschaftlicher Hinsicht etwas gleichgiltiges. Ob sie in Hinsicht auf Methode wohl daran thaten, wage ich nicht zu bestimmen. Wir aber, da bey uns die Anwendung der arithmetischen Regeln auf die Geometrie den Hauptheil unserer ganzen Mathematik ausmacht, gegen den die Geometrie der Alten zu etwas sehr Unbedeutendem zusammen schmilzt, würden bey der viel schwerfältigeren Methode der Alten wenig gewinnen. Daher sind auch in unserer Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze überall die arithmetischen Regeln (und zwar in dem ersten Theile derselben bloß die Regeln der synthetischen Arithmetik) angewandt worden.

Beweisen nicht weiter auf; so wenig, als weiter unten über die Form der Aufgaben mit analytischen Auflösungen.

g) An das, was über Zusammensetzung und Vervielfältigung der Beweise von S. 91 an gesagt worden ist, knüpft sich das Wenige, was die Einschaltung von Beweisen in Beweise betrifft.

In Hinsicht auf Form ist eine solche Einschaltung im Allgemeinen nicht zu billigen, obgleich sie in Hinsicht auf wissenschaftliche Begründung gleichgiltig ist. Im Allgemeinen, sage ich; denn, streng genommen, ist in einem synthetischen Beweise jede, auch noch so kleine, Abweichung vom synthetischen Gange, jeder Satz z. B., der mit der Conjunction „denn" anfängt, ein Beweis im Beweise. Wenn dergleichen Sätze nicht allzulange sind, so sind sie oft zur Abkürzuug oder Abwechselung des Vortrags eher zu empfehlen, als zu tadeln. Aber schon z. B. die Gründe, warum zwey Dreyecke congruent sind, lasse ich die Schüler ungern dahinter setzen, weil dadurch die Folgerungen aus der Congruenz der Dreyecke von dem Satze, woraus sie gefolgert werden, schon zu sehr getrennt werden. Eine solche Versetzung ist auch ohne Nutzen, weil man den Satz, daß diese Dreyecke congruent sind, und die Absicht, diese Congruenz zu beweisen, sehr leicht im Kopfe haben und behalten kann, ohne es gerade auszusprechen.

Wenn dagegen die Einschaltung von Beweisen in Beweisen getadelt wird, so betrifft dieser Tadel die Beweise solcher Sätze, die man weit schicklicher als besondere Lehrsätze oder wenigstens als Hülfssätze hätte vorausschicken können. — Ob ein solcher Hülfssatz vorausgeschickt, oder hintennach beygebracht werde, ist in Hinsicht auf wissenschaftliche Begründung gleichgiltig; in Hinsicht auf Form scheint das erste passender.

So viel über das Verhältniß des Lehrsatzes zum Systeme der Geometrie und über die sich daraus ergebende Form für denselben. Weit kürzer können wir uns nunmehr über die Aufgabe fassen.

Oben (S. 72) wurde behauptet, wir könnten uns ein System der Geometrie denken, das eine reine Zusammenstellung von lauter wohlgeformten Vernunftschlüssen wäre. In dieser, wird ferner (S. 76 ff.) gesagt, sey der Lehrsatz nur eine Unterbrechung, welche, in Rücksicht auf Methode, sehr wohl begündete Vorzüge vor einer ununterbrochenen Reihenfolge von Vernunftschlüssen habe. Hiermit wird zugleich stillschweigend angenommen, daß sich ein System der Geometrie ohne Aufgaben denken lasse; eine Annahme, die vor allen Dingen gerechtfertigt werden muß.

Die beste Rechtfertigung wäre die wirklich gelungene Ausführung eines solchen Systems. Dergleichen Ausführungen besitzen wir aber an den berühmtesten geometrischen Lehrbüchern der neueren Zeit, nämlich des Engländers Thomas Simpson, des Holländers Van Swinden und des Franzosen Legendre. Allerdings läßt sich nicht läugnen, daß diese Lehrbücher ihren Ruf nicht durch ihre Methode, sondern durch die Reichhaltigkeit ihrer Materie erlangt haben. Allein ihre Bücher liegen als Proben vor uns, und können der Beurtheilung unterworfen werden.

„Euklid" (sagt Hauber a. a. O. S. 204) „verlangt nie zu den Beweisen seiner Lehrsätze, etwas zu machen oder als gemacht zu denken, was nicht entweder im Anfange des Buches von ihm selbst postulirt, oder in einer vorhergehenden Aufgabe gezeigt worden sey, wie es gemacht werde."

Da dieß allerdings wahr ist, so entsteht daraus ein Einwurf gegen die Auslassung der Aufgaben aus dem System der Geometrie, der hier entweder zugestanden oder beseitigt werden muß.

Der Lehrsatz, der eine Construction enthält, stützt sich, wie gesagt, nach Euklids Methode, auf vorhergegangene Aufgaben, welche die Verfertigung dessen lehren, was die Construction zu machen vorschreibt. Außer der Construction ist aber keiner unter den sechs Theilen des Lehrsatzes (s. oben S. 62), der sich auf vorhergegangene Aufgaben beriefe. Ist

es also die Verfertigung einer Sache, welche das Vorangehen von Aufgaben nothwendig macht? Ist denn die Verfertigung einer Sache nothwendig, um die Wahrheit eines Satzes einzusehen? Ist sie nöthig, um die Wahrheit zu beweisen? — Nein, ist jedermann einverstanden, eine solche Verfertigung ist nicht nothwendig. Aber, sagt man *), durch die Verfertigung ist die Möglichkeit bewiesen: dadurch, daß Euklid, in I. Satz 46, die Verfertigung eines Quadrates lehrt, ist die Möglichkeit des Quadrates bewiesen; dem Satz 47 (dem Pythagoräischen Lehrsatze) die Construction des Quadrates auf einer gegebenen Linie vorauszuschicken, war nothwendig. Dadurch ferner, daß Euklid in I. Satz 9 die Halbirung des Winkels lehrt, ist die Möglichkeit, daß ein Winkel halbirt werden könne, bewiesen; da Euklid schon in Satz 5 die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreyecks beweist, ehe die Aufgabe von Halbirung des Winkels vorkam, so durfte er den Beweis nicht dadurch führen, daß er den Winkel an der Spitze halbirte, wie es van Swinden gethan hat (vgl. Hauber a. a. O.).

Wenn es aber demnach nur die Möglichkeit der Verfertigung oder vielmehr die Möglichkeit des Seyns ist, die durch die Aufgabe bewiesen werden soll; so ist, um solche Möglichkeit zu beweisen, offenbar die Form der Aufgabe nicht unbedingt nothwendig. Die Möglichkeit des Quadrats hätte Euklid ohne die Form der Aufgabe beweisen können, so wie sich die Möglichkeit eines Parallelogramms, ohne Aufgabe, aus Euklid Satz 33, der ein Lehrsatz ist, ergibt. Die Möglichkeit der Halbirung des Winkels, oder vielmehr die Möglichkeit, daß ein Winkel aus zwey gleichen Theilen bestehe, ist ein Axiom, da der Winkel eine Größe ist, und eine jede Größe als aus zwey gleichen Theilen bestehend gedacht werden kann. — Im Gegentheil kommen im Euklid keine Aufgaben vor, deren Auflösung nicht schon im Voraus als möglich gedacht wird.

*) Z. B. Kästner in seiner Gesch. der Mathem. I. S. 392.

„Euklids Verfahren“, sagt Kästner a. a. O., „richtet sich nach der Vorschrift: Man muß nichts verlangen, von dem man nicht sicher ist, daß es geschehen kann.“ So verlangt z. B. (I. Satz 22) Euklid nicht, aus jeden dreyen Seiten ein Dreyeck zu verfertigen;“ sondern er verlangt nur aus solchen dreyen Seiten ein Dreyeck zu verfertigen, deren je zwey zusammen größer als die dritte sind; nachdem er vorher (im Satz 20) bewiesen hat, daß in jedem Dreyeck jede zwey Seiten zusammen größer als die dritte sind. Durch die Auflösung der Aufgabe (Satz 22) ist nun allerdings die Möglichkeit dargethan, daß sich aus jeden drey Seiten, deren zwey zusammen jedesmal größer als die dritte sind, ein Dreyeck verfertigen lasse; allein diese Möglichkeit hätte sich auch ohne die Form einer Aufgabe beweisen lassen.

Warum aber hat Euklid in seinen Elementen Aufgaben und Lehrsätze unter einander? Und ist es nicht eine wesentliche Abweichung von seiner Methode, wenn ein System der Geometrie ohne Aufgaben aufgeführt wird?

Der didactische Tact war es, um auf die erste Frage zu antworten, der den Euklid eine geometrische Wahrheit bald in Form einer Aufgabe, bald eines Lehrsatzes vortragen hieß. Der didactische Tact gab ihm ein, den Theil des Lehrsatzes, der die Construction genannt wird, als eine Vorschrift zur Verfertigung auszusprechen. Die Exposition nämlich stellt diejenigen Theile der Figur dar, die schon durch die Proposition vorausgesetzt werden; die Construction hingegen diejenigen Theile der Figur, die der Demonstration wegen hinzukommen müssen. Beyde von einander wesentlich verschiedene Theile des Beweises auch im Styl zu unterscheiden, konnte für den didactischen Zweck nur förderlich seyn. — Wenn aber einmal die Construction als eine Verfertigung dargestellt wird, so scheint es consequent (Falls nicht andere Rücksichten überwiegen) die Verrichtungen, die in der Construction verlangt werden, als solche zum Voraus zu lehren.

Dazu kommt, daß es in wissenschaftlicher Hinsicht einer-

ley ist, in welcher Form eine geometrische Wahrheit gelehrt werde. Denn, wenn eine bestimmte geometrische Wahrheit nothwendig als Aufgabe oder als Lehrsatz behandelt werden müßte; so wäre es noch nicht genug, die Wahrheit selbst bewiesen zu haben: sondern es müßte auch jedesmal noch gezeigt werden, daß dieser Satz ein Lehrsatz seyn müßte, und keine Aufgabe seyn könnte, oder eine Aufgabe seyn müßte, und kein Lehrsatz seyn könnte. Dieser Schluß ist durch die ganze Geometrie so durchgreifend, daß wir von gar keinem Satze, der irgend eine geometrische Wahrheit ausspricht, behaupten können, daß er nothwendig unter dem Nahmen vorgetragen werden müßte, unter dem sein Vortrag beliebt worden ist. Der Gegenstand einer Erklärung z. E. kann der Gegenstand eines Lehrsatzes, der Lehrsatz kann zur Erklärung werden u. s. w. Unter welchem Nahmen eine geometrische Wahrheit am zweckmäßigsten vorgetragen werde, ist nicht Sache der geometrischen Wissenschaft, sondern nur Sache der geometrischen Lehrkunst.

In Hinsicht auf die zweyte Frage, ob es nicht rine wesentliche Abweichung von Euklids Methode sey, wenn ein System der Geometrie ohne Aufgaben aufgeführt werde, bemerken wir, um diese Frage im Ganzen zu verneinen, nnd eine solche Abweichung als nicht sehr wesentlich zu bezeichnen:

1) Es ist nicht wesentlich, ob man den Inhalt der Construction eines Lehrsatzes so angeben wolle, als seyen die zur Exposition, der Demonstration wegen, noch hinzukommenden Theile der Figur noch zu machen, oder als gemacht zu denken *).

*) Da ich in meinem Lehrbuche die Postulate und Aufgaben deßwegen eliminirt habe, um dadurch das Ganze bedeutend ins Kürzere zu ziehen (s. das. die Vorrede); so habe ich darin, um nicht gegen die Consequenz der Methode zu verstoßen, dem ersten mit einer Construction versehenen Beweise (§. 28) die Anmerkung hinzugefügt: „Statt zu sagen „ziehe CE ‖ AB" wäre richtiger gesagt worden, „denke sich CE ‖ AB gezogen." Das erste ist aber kürzer." — „Let be drawn" (die Formel der Er=

Es ist also nicht wesentlich, daß, der Constructionen künftiger Lehrsätze wegen, Sätze in Aufgabenform vorangehen.

2) Euklid fügt seinen einzelnen Sätzen die unterscheidende Aufschrift „Aufgabe" und „Lehrsatz" nicht hinzu. In der Ausgabe des Hervagius sind dieselben bloß mit den Zahlzeichen α, β, γ u. s. bezeichnet. Dagegen sagt Pfleiderer: „Euclidem solam inscriptionem προτασις usurpasse, quam et textus graecus Gregorii, atque versio Campani habent, ex Procli Lib. II. Cap. 8. colligitur." Hauber l. c. p. 296). Ob nun Euklid seine Sätze ohne Unterschied mit προτασις überschrieben, oder mit gar keiner Aufschrift versehen hat, kann aus der von Pfleiderer citirten Stelle des Proklus (sie ist die erste der oben S. 47 bis 57 mitgetheilten, und zwar am Schlusse; siehe oben S. 56.) nicht geschlossen werden; aus dieser Stelle läßt sich nur abnehmen, daß Euklid sich der Ueberschriften „Aufgabe" oder „Lehrsatz" nicht bedient habe. Daß aber Euklid, obgleich er sich einer solchen unterscheidenden Aufschrift nicht bedient, dennoch einen Unterschied zwischen Aufgabe und Lehrsatz mache, beweist Proklus aus der Schlußformel ὁπερ ἐδει ποιησαι und ὁπερ ἐδει δειξαι. Er hätte den Beweis eben so entscheidend aus dem Styl der Proposition entnehmen können.

Dieß hängt aber zusammen mit dem nunmehr

---

position oder Voraussetzung, Statt des kürzeren zu den Constructionen gebräuchlichen „draw") ist der Styl des älteren, wegen seiner Methode noch Anfechtung befürchtenden, Th. Simpson, im Vortrag seiner Constructionen. Der neuere Legendre ist schon darüber hinweg, und sagt kurz und gut: „Tirez," ohne sich darum zu bekümmern, ob man die Verrichtung, die er verlangt, auch auszuführen im Stande, oder zu machen gelehrt worden sey. — Daß die Engländer und Franzosen in der zweyten Person reden, möchte ich übrigens nicht schön finden. Die Griechen und (mit seltenen Ausnahmen) die Deutschen verrathen hierin ein zärteres Gefühl.

zu bestimmenden Verhältniß der Aufgabe zum Systeme der Geometrie.

Gleichwie der Lehrsatz eine Unterbrechung des rein synthetischen Ganges der Geometrie ist, welcher synthetische Gang ganz ohne alle Einverwebung von Lehrsätzen hätte fortgeführt werden können; so ist in einem Lehrgebäude der Geometrie die Aufgabe ein aus der kategorischen Stylform des Lehrsatzes in die Form der Frage verwandelter Satz *). Da man in einer Zusammenstellung der Lehren einer Wissenschaft die fragende Stylform entbehren kann; so kann auch ein System der Geometrie ohne Aufgaben aufgeführt werden **). Didactische Gründe sind es nur, welche

*) Lambert drückt sich darüber in seinem Neuen Organon, I. S. 100, so aus: „Eine Frage auf ihre einfachste Form gebracht, hat nur zwey Begriffe, und von diesen ist der eine nothwendig ein Verbum oder Zeitwort, z. E. Eine Linie ziehen, Ein Verhältniß finden, Eine Höhe messen, Einen Satz beweisen ꝛc. Wir sind diese einfache Form wiederum den Mathematikern schuldig. Diese haben solche Fragen Aufgaben genannt, und die Antwort darauf, die Auflösung, wozu noch der Beweis kommt, daß durch die Auflösung der Frage ein Genügen geschehen sey." — Den Unterschied zwischen der fragenden und der kategorischen Stylform setzt Lambert (a. a. O. S. 106.) darin, daß die Fragen immer durch den Infinitiv, die kategorischen Sätze aber immer durch den Indicativ ausgedrückt werden können. (vgl. Hauber l. c. p. 167.). Gesetzt, daß Grammatiker dagegen etwas einzuwenden haben sollten, daß Lambert (und ihm folgend, der Verfasser dieses) die Form, in welcher die Proposition der Aufgabe vorgetragen zu werden pflegt (z. B. eine gerade Linie zu ziehen), eine Frage nennt; so hätte selbst das Zugeständniß der Richtigkeit eines solchen Einwurfs keinen wesentlichen Einfluß auf die Resultate unserer Untersuchung.

**) „Es ist klar," sagt Lambert a. a. O. S. 578, „daß man im Vortrage die Wahl hat, die Entstehungsart des Begriffes oder der Sache selbst, in Form eines Satzes, oder aber in Form einer Aufgabe vorzutragen. So z. E. trägt Euklid in

zur Mittheilung der Wahrheit bald die eine, bald die andere Form des Styls, vorzugsweise empfehlen.

Wenn die Proposition der Aufgabe die Frage ist, so ist die Auflösung die Antwort. Gleichwie beym Unterricht die Frage und die Antwort zusammen genommen die mitzutheilende Wahrheit enthalten; so sprechen Proposition und Auflösung der Aufgabe zusammen genommen die geometrische Wahrheit aus. Sie sind zusammen genommen, im Systeme der Geometrie, der Proposition eines Lehrsatzes gleich zu achten *).

Aus dem so bestimmten Verhältniß der Aufgabe zum Systeme der Geometrie ergeben sich folgende Bestimmungen für die passendste Form derselben:

---

seiner ersten Proposition die Möglichkeit eines gleichseitigen Triangels in Form einer Aufgabe vor, die sich aber leicht in einen Satz verwandeln läßt, wenn man die Auflösung zum Subject, die Frage der Aufgabe aber zum Prädicat macht" — „Es scheint mir, als wenn jede Aufgabe," sagt Savilius (s. Hauber l. c. p. 176) „in einen Lehrsatz zurück verwandelt werden (resolvi) könne. So könnte man die Aufgabe des Euklid also ausdrücken: Wenn aus den beyden Endpunkten einer geraden Linie, als Mittelpunkten, mit dem Abstande derselben, zwey Kreise beschrieben, und aus dem Durchschnitte derselben zwey gerade Linien nach den Endpunkten gezogen werden; so ist die beschriebene Figur ein gleichseitiges Dreyeck."

*) „Problemata facienda proponunt et tribus partibus constant, Propositione scilicet, Resolutione ac Demonstratione. In propositione, quid fieri debeat, indicatur. In resolutione singuli actus ordine decenti recensentur, quibus efficitur, quod erat faciendum. Denique in Demonstratione evincitur, factis iis, quae resolutio praecipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque problema [est] demonstrandum, in theorema convertitur, cujus hypothesin resolutio, thesin vero propositio constituit." Wolfii Elem. l. p. 15.

a) Die Aufgabe zerfällt in die drey Hauptabtheilungen: Proposition, Auflösung und Beweis. — In dem Euclides Herv. ist die Proposition von Auflösung und Beweis nur dadurch unterschieden, daß sie mit größerer Schrift gedruckt ist (vgl. oben S. 83). Auflösung und Beweis werden durch gar kein äußeres Zeichen von einander unterschieden.

b) Die Proposition der Aufgabe wird am besten ohne alle Hinweisung auf irgend eine Figur ausgesprochen (vgl. oben S. 84).

c) Auflösung und Beweis der Aufgabe werden am zweckmäßigsten mit Hinweisung auf die Figur bewerkstelligt (vgl. oben S. 84).

Daß Auflösung und Beweis einer Aufgabe sich ohne Hinweisung auf eine Figur bewerkstelligen lassen, ist leicht einzusehen. Scheubelius (vgl. oben S. 85) hat es wirklich gethan.

Da aber Proposition und Auflösung der Aufgabe zusammen genommen der Proposition des Lehrsatzes entsprechen, so entsteht natürlich die Frage, ob nicht bey der Aufgabe die Auflösung der Proposition gleich behandelt, und wie diese ohne Hinweisung auf die Figur ausgesprochen werden soll.

Allein hier bemerken wir: Das, was die Aufnahme der Aufgabe in das Lehrgebäude der Geometrie, Statt des dieselbe geometrische Wahrheit aussprechenden Lehrsatzes, in didactischer Hinsicht empfiehlt, ist die Kürze der Proposition, welche die Aufgabe vor dem gleichbedeutenden Lehrsatz voraus hat. Denn die Frage ohne die Antwort ist gewöhnlich kürzer, als die mit allen ihren Bestimmungen kategorisch vorgetragene Lehre. [Ich erinnere hierbey an das Methodische der Katechismen, wo die Anwendung derselben nicht gegen den Geschmack verstößt.]. Man vergleiche die Proposition der Aufgabe: „Ueber einer geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben,“ mit der Proposition des gleichbedeutenden Lehrsatzes: „Wenn auf den beyden Endpunkten einer geraden Linie u. s. w. (siehe Note zu S. 127).

Durch die Verwandlung eines Lehrsatzes in die gleichbedeutende Aufgabe (wenn ich so reden darf, da unser Gefühl

die Aufgabe, wo sie in einem Systeme vorkommt, als an ihrem Orte und natürlich ansieht, und die Substitution des gleichbedeutenden Lehrsatzes für gezwungen und künstlich halten würde) wird demnach die Proposition bedeutend abgekürzt. Die Auflösung der Aufgabe ist wenigstens eben so leicht im Gedächtnisse zu behalten, als es die Proposition des entsprechenden Lehrsatzes wäre. Allein, Falls diese Auflösung auch nicht behalten würde, so thäte das der Begründung nachfolgender Lehrsätze oder Aufgaben keinen Eintrag. Denn diese machen in ihren Constructionen nicht sowohl von der Auflösung selbst, als davon Gebrauch, daß durch das frühere Vorkommen der Aufgabe im Systeme die Möglichkeit der Auflösung dargethan ist.

Gleichwie nun durch die Einführung des Lehrsatzes mit seinem Beweise, der Beweis zu einem untergeordneten Bestandtheil des Systems geworden, und nur die Proposition vorzugsweise im Gedächtniß behalten werden muß; so ist wieder durch die Verwandlung des Lehrsatzes in die Aufgabe ein ähnlicher Gewinn entstanden: es hat sich auch noch die Auflösung der Aufgabe von den hervorgehobenen Theilen des Systemes abgesondert und zu den untergeordneten gestellt.

Aus demselben Grunde also, aus welchem der Beweis des Lehrsatzes am zweckmäßigsten mit Hinweisung auf die Figur geführt wird, werden jetzt auch Auflösung und Beweis der Aufgabe am zweckmäßigsten mit Hinweisung auf die Figur bewerkstelligt.

d) Was nun die sechs Theile betrifft, aus welchen nach Proklus (s. oben S. 62) eine jede Aufgabe, gleich jedem Lehrsatze, bestehen soll; so ist schon (in der Note daselbst) bemerkt worden, daß sich die Unterscheidung dieser sechs Theile nach der von Proklus angegebenen Reihenfolge schwerlich werde durchführen lassen (man sehe daselbst das 4te und 5te Beyspiel nach).

Auf dieselbe Weise, wie im Lehrsatz sechs, lassen sich in der Aufgabe acht Theile unterscheiden, nämlich: a) die Proposition: „Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren"; b) Eine Art von Exposition: „Es sey ADB (Fig. 4) der

gegebene Kreisbogen"; c) die Bestimmung dessen, was gemacht werden soll: „So soll man den Bogen ADB halbiren" *); d) die Solution **): „Es werde die AB gezogen, und in C halbirt; und aus dem Punkte C werde auf die gerade AB das Perpendikel CD errichtet" ***); e) der

---

*) In der Proposition der Aufgabe lassen sich das Gegebene und das Gesuchte (s. oben S. 63), oder Datum und Quaesitum unterscheiden. „Der Kreisbogen" ist das Gegebene; „seine beyden Hälften" das Gesuchte. Die beyden Theile b und c entsprechen dem Datum und Quaesitum der Proposition; gleichwie die Exposition und Determination des Lehrsatzes der Hypothesis und Thesis seiner Proposition entsprechen. In so fern ist also der Theil c gleichsam der Determination des Lehrsatzes analog. In so fern aber die Determination des Lehrsatzes demjenigen Satz entspricht, den die Demonstration begründen soll, und der in dem Schlußsatz der Demonstration wiederholt wird, weichen der Theil c der Aufgabe und die Determination des Lehrsatzes sehr von einander ab, und stimmt diese dagegen mehr mit dem Theil e der Aufgabe überein.

**) Man erlaube mir hier dieses Wort zu gebrauchen. Auf dieselbe Weise nämlich, wie wir bisher Beweis und Demonstration unterschieden haben, indem die Demonstration der Haupttheil, der eigentliche Leib, des Beweises ist; so wollen wir jetzt den Haupttheil der Auflösung einer Aufgabe (zu welcher noch die Theile b, c und e gehören) die Solution nennen.

***) Die erste Aufgabe des Euklid (s. oben in der Note zu S. 62 das dritte Beyspiel) entbehrt wirklich den Theil f, und der Theil e derselben ist von Euklid nicht ausgesprochen worden, obgleich er auf dieselbe Weise wie in andern Aufgaben, z. B. in I. Satz 9 (s. das vierte Beyspiel a. a. O.) hätte ausgesprochen werden sollen. Daher hat dieselbe, wie sie in Euklid zu lesen ist, wirklich nur sechs Theile, die nun von Proklus (s. oben S. 68) sehr unlogisch mit den sechs Theilen des Lehrsatzes benannt werden. Den Theil c nennt er den διορισμος und den Theil d die κατασκευη. — Proklus hätte zur Erläuterung seiner Auseinandersetzung der Theile, woraus nach ihm Aufgabe und Lehrsatz bestehen, die aber in der Wirklichkeit nur für den

letzte Satz der Auflösung *): „So sage ich, daß der Bogen AD dem Bogen BD gleich ist"; f) die Construction:

Lehrsatz paßt, nicht unglücklicher verfahren können, als indem er die erste Euklidische Aufgabe zum Beyspiel wählte.

*) Ich will diesem Satz gar keinen Nahmen geben, weil mir kein passender einfällt, durch welchen nicht eine Verwechselung entstehen könnte. „Schlußsatz der Auflösung" darf er nicht genannt werden, weil man sich unter Schlußsatz nicht bloß einen letzten Satz, sondern auch einen durch Schließen herausgebrachten Satz denkt; und das ist doch hier noch nicht der Fall. Hauber nennt ihn διοριςμος της κατασκευης. Dieß ist aber unpassend, weil es unpassend ist, die Auflösung eine κατασκευη (Vorbereitung, welche Benennung für die Construction des Lehrsatzes wohl paßt) zu nennen.

Dieser letzte Satz der Auflösung ist der Determination des Lehrsatzes am meisten analog, in so fern er denjenigen Satz ausspricht, den die Demonstration begründen soll, und der in dem Schlußsatz der Demonstration wiederholt wird (vgl. die erste Note S. 130).

Gleichwie Proposition und Auflösung der Aufgabe zusammen genommen der Proposition eines Lehrsatzes entsprechen; so entsprechen die fünf ersten Theile der Aufgabe zusammen genommen den 3 ersten Theilen des Lehrsatzes. Die drey ersten Theile des Lehrsatzes sind Proposition, Exposition und Determination. Mehr ist nun eigentlich auch nicht in den 5 ersten Theilen der Aufgabe enthalten. Dächte man sich die Auflösung ohne Hinweisung auf die Figur ausgesprochen, z.B.: „Es sey ein Kreisbogen gegeben; man ziehe die zugehörige Sehne, und errichte auf der Mitte derselben ein Perpendikel: so theilt dieses den gegebenen Kreisbogen in zwey gleiche Theile"; und diese so ausgesprochene Auflösung anders stylisirt: „Wenn man die zu einem gegebenen Kreisbogen gehörige Sehne durch ein Perpendikel halbirt; so theilt dieses Perpendikel den gegebenen Kreisbogen in zwey gleiche Theile": so hätte man eine vollkommene Proposition eines Lehrsatzes, in welcher die Bedingung, daß die zu einem gegebenen Kreisbogen gehörige Sehne durch ein Perpendikel halbirt sey, die Hypothesis, und der Satz, daß der Kreisbogen in zwey gleiche Theile getheilt

„Es werden die AD und BD gezogen"; g) die Demonstration: „Da die AC und BC gleich u. s. w."; h) die Conclusion: „Der gegebene Kreisbogen ist also halbirt worden. Was zu machen war" *).

Gleichwie wir es in einem niedergeschriebenen Lehrsatz nicht für nöthig gefunden haben, alle sechs Theile förmlich, mit Bezeichnung der ihnen zukommenden Benennung, von einander zu unterscheiden; so treiben wir die Unterscheidung der Theile einer Aufgabe auch nicht weiter, als daß wir die Proposition, die Auflösung und den Beweis von einander trennen.

Wir betrachten auch bey der Aufgabe den synthetischen Gang in Auflösung uud Beweis als denjenigen, der ihrem Verhältniß zum Systeme der Geometrie am angemessensten ist (vgl. oben S. 112). Wenn wir unsere Algebra auf die Auf-

---

sey, die Thesis wäre. (So ist die oben (S. 127) in der Note mitgetheilte Stelle von Wolf zu verstehen.). So schwindet nun der Inhalt der Proposition einer Aufgabe (z. B.: „Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren"), wenn man die Aufgabe mit dem gleichgedeutenden Lehrsatz vergleicht, zu einer leeren Frage zusammen, die wie jede eigentliche Frage noch keine Wahrheit ausspricht; die Theile b und c wiederholen diese Frage mit Hinweisung auf die Figur; eine Hypothesis und Thesis ohne Hinweisung auf die Figur (was beym Lehrsatz die eigentliche Proposition ist) werden nicht ausgesprochen; der Theil d entspricht der Hypothesis mit Hinweisung auf die Figur (also der Exposition des Lehrsatzes) und der Theil e entspricht der Thesis mit Hinweisung auf die Figur (also der Determination des Lehrsatzes).

*) Die drey letzten Theile der Aufgabe unterscheiden sich gar nicht von den drey letzten Theilen des Lehrsatzes. Nachdem ausgesprochen ist, was bewiesen werden soll (was im Lehrsatze durch die Determination und in der Aufgabe durch den letzten Satz der Auflösung geschieht) werden die Hülfslinien gezogen (die Construction gemacht); darauf folgt die Schlußkette des Beweises, die sich mit dem Schlußsatze selbst endigt.

lösung einer vorgelegten Aufgabe anwenden, so ist der Beweis sogleich in der Auflösung mit enthalten. Von dergleichen Aufgaben wird aber in unserer Sammlung vorerst ganz abstrahirt.

In den Aufgaben, wovon hier die Rede ist, würden wir es als einen Fehler tadeln, wenn Auflösung und Beweis mit einander vermengt würden. Zur Auflösung gehören die oben unter b, c, d und e; zum Beweise die unter f, g und h aufgeführten Theile. Unter diesen ist der Theil c derjenige, der am wenigsten vermißt wird, wenn man ihn ausläßt. Es verhält sich mit ihm in dieser Hinsicht auf eine ähnliche Art wie mit der Determination des Lehrsatzes (vgl. oben S. 89). Dagegen würde ich es für eine Unvollkommenheit halten, wenn der Theil e mit Stillschweigen übergangen wird, wiewohl das Euklid sehr oft thut. Wenn dieser Theil fehlt, so fehlt eigentlich die bestimmte Antwort auf die in der Proposition enthaltene Frage; und dann ist auch nirgends ausgesprochen, was eigentlich in dem Beweise bewiesen werden soll *).

Wir können als das Charakteristische einer Aufgabe, in so fern dieser eine Stelle in einem synthetischen Lehrgebäude zukommt, das anführen, daß sie einer Auflösung bedarf. So können folgende Propositionen nicht als Aufgaben angesehen werden, obgleich man ihnen die Form derselben aufgezwungen hat: „Zu beweisen, daß das Quadrat der Hypotenuse den Quadraten der beyden Katheten gleich sey." — „Zu untersuchen, ob das Quadrat der Hypotenuse den Quadraten der beyden Katheten gleich ist." — Zu untersuchen, welches Verhältniß das Quadrat der Hypotenuse zu den Quadraten der beyden Katheten habe." U. s. w.

---

*) Ich bemerke hier gelegentlich eine Abweichung, in welche die Schüler sehr häufig verfallen; daß sie nämlich die Auflösung mit dem Theil d als geschlossen ansehen, und den Beweis mit dem Theil e anfangen, mit der Formel: „Es ist zu beweisen, daß der Bogen AD dem Bogen BD gleich ist.

e) Ob es den zusammengesetzten Lehrsätzen (s. oben S. 91) analog auch zusammengesetzte Aufgaben gebe, möchte ich kaum bejahen. Eine solche Zusammensetzung scheint mir entweder unächt oder gezwungen.

Ein Beyspiel einer unächten Zusammensetzung gibt Euklid XIII. Satz 13. „Ein Tetraëdron in eine gegebene Kugel zu beschreiben; auch zu beweisen, daß das Quadrat des Durchmessers der Kugel sich zum Quadrat der Seite des Tetraëdrons wie drey zu zwey verhalte." Der erste Theil dieser Proposition ist nämlich eine Aufgabe, und der andere Theil ein Lehrsatz. Man vergleiche damit die Form, welche Mollweide in seiner Ausgabe der Lorenzischen Uebersetzung der Proposition dieses 13ten Satzes gibt.

Ein Beyspiel einer gezwungenen Zusammensetzung wäre folgende Proposition: „Ein Tetraëder und ein Octaëder in einer gegebenen Kugel zu beschreiben."

Was aber oben (S. 98. und folg.) über die Unterscheidung in mehre Fälle gesagt worden, ist auch ganz auf die Aufgaben anwendbar. Eine solche Unterscheidung kann sowohl gleich im Anfange, als in den folgenden Theilen, nicht nur der Auflösung, sondern auch des Beweises, nothwendig werden.

f) Gleichwie es für einen Lehrsatz mehre Beweise geben kann (s. oben S. 103), so sind auch für dieselbe Aufgabe mehre Auflösungen möglich. Es ist aber auch jetzt wieder nur eine unter allen möglichen Auflösungen nothwendig, um die Aufgabe vollständig aufzulösen. Da sich aber die Proposition mit der Auflösung zusammen in die Proposition eines Lehrsatzes verwandeln läßt, so gibt auch jede andere Auflösung einen anderen Lehrsatz, z. B.

Aufg. Eine gegebene gerade Linie zu halbiren.

Erste Aufl. Man beschreibe über derselben ein gleichschenkliges Dreyeck und halbire den Winkel an der Spitze durch eine gerade Linie, so halbirt diese die gegebene Linie.

Zweyte Aufl. Man beschreibe über derselben zwey gleichschenklige Dreyecke, und verbinde die Spitzen derselben

durch eine gerade Linie, so halbirt diese die gegebene Linie.

Die erste Auflösung gibt folgenden Lehrsatz: Wenn man über einer gegebenen geraden Linie ein gleichschenkliges Dreyeck beschreibt, und den Winkel an der Spitze durch eine gerade Linie halbirt, so wird durch dieselbe die gegebene gerade Linie ebenfalls halbirt.

Dagegen gibt die zweyte Auflösung folgenden Lehrsatz: Wenn man über einer gegebenen geraden Linie zwey gleichschenklige Dreyecke beschreibt, und die Spitzen derselben durch eine gerade Linie verbindet, so wird durch dieselbe die gegebene gerade Linie halbirt.

So wie ein jeder dieser beyden Lehrsätze eines eignen Beweises bedarf, so erfordert auch eine jede besondere Auflösung zu ihrer Begründung einen besonderen Beweis.

Das System der synthetischen Geometrie kennt außer den Prinzipien nur Lehrsätze, Aufgaben und Zusätze. Diese letzten sind in der That selbst Lehrsätze oder Aufgaben, welche sich von den eigentlichen nur dadurch unterscheiden, daß sich ihre Begründung sehr leicht und unmittelbar an die Begründung anderer Lehrsätze und Aufgaben anknüpft, daß man sie also weder mit besonderen Beweisen, noch mit besonderen Auflösungen versieht. — Nun werden aber auch noch andere Namen für geometrische Sätze gebraucht, wie Oerter, Data, Porismen. Es wäre hier kein unschicklicher Ort, die Begriffe aus einander zu setzen, welche mit diesen Namen belegt werden. Wenigstens hatte ich mir dieses vorgenommen. Aber da namentlich das, was ich über Porismen zu sagen hätte, (deren Begriff zwar immer zweifelhaft bleibt, mir aber von Robert Simson ganz verfehlt zu seyn scheint) nicht kurz seyn könnte; so muß ich, indem diese Einleitung schon allzu lang geworden, das Weitere auf eine bessere Gelegenheit verschieben (vgl. oben S. 31 und 37).

II. Ueber den Gebrauch und die Einrichtung der Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze als Material des Unterrichts.

Unter dieser Aufschrift habe ich mir vorgenommen, hauptsächlich Einiges über die Einrichtung schriftlicher geometrischer Arbeiten oder geometrischer Aufsätze beyzubringen, welche mich vor Allem zur Sammlung der geometrischen Aufgaben und Lehrsätze bewogen haben.

Das schriftliche Aufsetzen geometrischer Aufgaben oder Lehrsätze soll unter den mancherley Uebungen der Schüler durch und zu Erlernung der Geometrie, und unter den mancherley Methoden, dieser Wissenschaft Eingang bey denselben zu verschaffen, nur eine seyn. Daher wird man mich auch nicht misverstehen, wenn das, was ich über den Nutzen und die Einrichtung dieser schriftlichen mathematischen Arbeiten sagen werde, in Hinsicht auf Methode des mathematischen Unterrichts, als einseitig erscheinen sollte. Denn hier (in dieser Einleitung) ist nicht der Ort, mich über die Methode des mathematischen oder geometrischen Unterrichtes überhaupt zu verbreiten.

Die Einrichtung dieser Arbeiten besteht in der Hauptsache darin, daß die Schüler irgend einen (einerley, durch welche dabey angewandte Methode) wohl begriffenen und vollständig gefaßten geometrischen Lehrsatz oder eine solche Aufgabe, welche mit dem Faden des Unterrichts in keinem nothwendigen Zusammenhang stehen, zu Hause, in höchst möglicher Vollkommenheit, reinlich und ordentlich, niederschreiben, und dem Lehrer zur Correctur einliefern.

Arbeiten dieser Art bezwecken

1) für den Schüler nicht sowohl Fertigkeit im Selbstfinden mathematischer Wahrheiten, als vielmehr

a) Einsicht in das Wesen der Begründung einer mathematischen Wahrheit, Uebung im gründlichen Denken überhaupt,

und Uebung in Beurtheilung des gründlich oder ungründlich Gedachten.

Alles dieses kann zwar auch durch ordentliches und schulgerechtes, mündliches Vortragen der Schüler von erlernten Auflösungen und Beweisen erreicht werden. Aber durch jene schriftlichen Uebungen kommt man schneller und sicherer zu diesem Ziele. Die gründliche Behandlung einer geometrischen Wahrheit mit Rücksicht auf den untergelegten (der Jugend näher gerückten), Zweck, daß die Begründung schriftlich aufgesetzt werden soll, reizt die Aufmerksamkeit aller Schüler einer Classe, ohne dieselbe zu ermüden; und weit mehr Pünktlichkeit wird bey dem schriftlichen Aufsetzen zu Hause beobachtet, als bey dem mündlichen Vortrage in der Schule. Weit begieriger werden bey der Zurückgabe der durchgesehenen Arbeiten die Bemerkungen des Lehrers angehört, und zu Herzen genommen, als wenn der Lehrer den mündlichen Vortrag eines Schülers, oft weniger belehrend als störend, mit zurechtweisenden Fragen und Verbesserungen unterbricht.

Es ist nicht nöthig, daß dergleichen schriftliche Arbeiten allzu oft gemacht werden. Wenn unter zehn bis fünfzehn mathematischen Lehrstunden eine zum Aufgeben, und eine andere halbe zur Zurückgabe der durchgesehenen Arbeiten verwandt wird, so ist dieses vollkommen hinreichend.

b) Ein zweyter Vortheil, welcher durch diese schriftlichen Arbeiten erreicht werden kann, ist eine unvermerkte planmäßige Repetition der Hauptsätze der Elementar-Geometrie, während einer beliebigen kürzeren oder längeren Zeit.

Repetitio est mater studiorum, ist ein höchst wahrer Satz. Allein eben so wahr ist es, daß die Anordnung der Repetitionen, sollen sie ihren Zweck bestmöglich erreichen, von Seiten des Lehrers eine besondere Aufmerksamkeit erfordern. Ueber die Kunst zu repetiren ließe sich eine eigene Abhandlung schreiben.

Den Unterricht in der Elementar-Geometrie sehe ich als den Haupttheil des mathematischen Unterrichts auf unsern Gym-

nasien an. Die Euklidische Geometrie (s. oben S. 35) ist ja auch derjenige Zweig der Mathematik, der seine Ausbildung vorzüglich didactischen Zwecken verdankt. Gesetzt daher auch, daß ich den höchst achtungswerthen Enthusiasmus derjenigen Lehrer der Mathematik nicht für mich hätte, welche ein schnelles Vorwärtsschreiten, wenn auch nur weniger Schüler, zu den höchsten Theilen der Mathematik als das Hauptziel ihres Strebens betrachten (einige wenige ausgezeichnet talentvolle Schüler möglichst weit zu bringen, ist auch für den Verfasser ein angenehmes Geschäft, dem er sich nicht entzieht): so habe ich doch gewissermaßen die Geschichte für eine Ansicht, deren Gründe weiter zu entwickeln, ich hier übergehen muß.

Da wir Gymnasial-Lehrer nur Knaben und Jünglinge, und nicht Männer, wie die Schüler Plato's und Euklids, zu unterrichten haben, so fällt, wenn auch nicht die Hauptthätigkeit, doch wenigstens die Hauptmühe, auf uns selbst. Wir müssen jederzeit im Stande und bereit seyn, die Thätigkeit unserer Schüler zu prüfen, zu lenken, zu spornen und zu erzwingen. Der Leitfaden unseres Unterrichts, gleichsam das Scelett desselben, muß daher eng und gedrängt seyn.*) Um einen leichten und schnellen Ueberblick zu gewähren, muß er sich auf die Hauptsätze beschränken. Diese müssen recht gelernt, ganz das Eigenthum der Schüler werden. Vieles von dem Neuen, das der Lehrer seinen Schülern mittheilt, (von Methode dieser Mittheilung ist hier nicht die Rede), wird nur jener Hauptsätze wegen mitgetheilt, um diese, durch beständiges (scheinbar absichtsloses) Zurückrufen wichtig und unvergeßbar zu machen.

An die schriftlichen Aufsätze nun läßt sich während eines beliebigen dafür bestimmten Zeitraums, z. B. von einem oder anderthalb Jahren, eine vollständige Repetition der Hauptsätze

*) Damit der Herr Professor seinen Zuhörern etwas mehr sagen könne, als im Compendium steht, ist doch wohl ein unschicklich ausgedrückter Grund für die gedrängte Kürze des letztern!

aus der ganzen Elementar-Geometrie, oder aus einem beschränkteren Cursus derselben, anknüpfen, wenn die geometrischen Aufgaben und Lehrsätze planmäßig dazu ausgewählt werden. — Aber auch selbst dann, wenn man die Auswahl dieser geometrischen Sätze mehr dem Zufalle überließe, würde die gelegentliche Repetition, die durch das nothwendige Beziehen auf die den Schülern bereits bekannten Sätze veranlaßt wird, zu einem nicht zu verachtenden Gewinn.

Diese schriftlichen geometrischen Aufsätze gewähren aber auch

2) dem Lehrer eine sehr genaue Controlle über die Fortschritte der sämmtlichen Schüler einer Classe. Gleichwie die Fehlerzahl in den Lateinischen und Griechischen Exercitien einen ungefähren Maßstab, zwar nicht für die Reife des Schülers überhaupt oder für seine Talente, aber doch für seine Fortschritte in diesen beyden alten Sprachen gibt; so berechtigen die Resultate jener schriftlichen geometrischen Aufsätze*) den Lehrer zu gewissen ganz entschiedenen Urtheilen über die Schüler.

*) Der Lehrer kann hier zwar nicht, wie beym Lateinischen Exercitium, die Zahl der Fehler angeben, die sich in einem geometrischen Aufsatze befinden; allein es bleibt ihm doch noch eine Bestimmung nach Zahl übrig, wenn er z. B. folgende Grade der Vollkommenheit unterscheidet: 1) vollkommen gut. Es werden sich unter den Schülern, welche einen Cursus der Elementar-Geometrie gemacht haben, immer einige finden, welche sogar einen selbst gefundenen Beweis vollkommen richtig, und in bester Form niederzuschreiben im Stande sind. Um so mehr wird es Schüler geben, welche einen mitgetheilten Beweis, und zwar so mitgetheilten Beweis, daß ihn auch noch die ziemlich schwachen Schüler einer Classe fassen und behalten können, vollkommen gut schriftlich wieder zu geben vermögen. 2) Geringere Fehler gegen die Form, wohin z. B., außer vielen andern, die Auslassung oder der falsche Gebrauch von Conjunctionen, überhaupt die Stylfehler gehören. — Andere Grade der Vollkommenheit kennt nun zwar der Mathematiker nicht, [indem fehlerhafte Beweise so gut als keine Beweise sind, vgl. oben S. 104]; aber der Lehrer, durch dessen Geduld und Mühe der Schüler erst für Aufnahme mathematischer Kenntnisse empfäng-

Was die Form betrifft, in welcher der geometrische Aufsatz abgefaßt werden soll, so kann ich mich darüber auf die erste Abtheilung dieser Einleitung berufen. Ich hätte hier nur noch das den Styl Betreffende hinzuzufügen. Darüber könnte ich mich aber, wenn ich gründlich seyn wollte, nicht kurz fassen; daher ich lieber ganz darüber schweige. Mich übrigens in Hinsicht des Styls auf die unten vorkommenden Lehrsätze und Aufgaben als Muster zu berufen, würde ich Unrecht thun, da ich mich in der Abfassung derselben, während der langen Zeit, daß ich zu meinem eigenen Gebrauche gesammelt habe, nicht gleich geblieben bin. Sie deßwegen noch einmal umzuarbeiten,

---

lich gemacht werden soll, kennt sie, nämlich: 3) Größere Fehler gegen die Form, oder kleinere gegen die Sache, oder beydes. Zu den größeren Fehlern gegen die Form rechne ich z. B. die Beybringung von überflüßigen Sätzen, von welchen im Beweise selbst weiter keine Anwendung gemacht werden kann; zu den kleineren Fehlern gegen die Sache, wenn z. B. für einen wahren Satz ein unrichtiger Grund angegeben wird. 4) Größere Fehler gegen die Sache. 5) Durchaus unvollkommen. — Einige, oder vielmehr ziemlich viele, Schüler merken sehr bald, wo es mit dem Beweisen hinaus will. Bey andern dauert es sehr lange, bis ihnen ein Licht aufgeht, daß das Fassen eines Beweises mehr Function der Urtheilskraft als des Gedächtnisses ist. Diese letzten nehmen vorzüglich die Geduld des Lehrers in Anspruch. Sie aufzugeben, als ermangelnd des Talents für Mathematik, wäre Unrecht. Denn gerade sie bedürfen die Geistesübung, die durch den mathematischen Unterricht auf Gymnasien bezweckt wird, am allernothwendigsten. Da diese Schüler, bey gutem Gedächtnisse, oft sehr schnelle Fortschritte in allem historischen Wissen machen; so haben sie zu dem Vorurtheil Veranlassung gegeben, als könne ein Mensch Verstand und doch kein Talent für Mathematik haben. Dem Aufkommen des mathematischen Unterrichts an unseren Gymnasien steht vielleicht nichts mehr im Wege als dieses ziemlich allgemein verbreitete Vorurtheil. Daher ist keine Gelegenheit zu versäumen, diese höchst schädliche Meinung mit dem wahren Namen zu belegen,

würde sich, im Vergleich des geringen Zuwachses ihrer Brauchbarkeit, der großen Mühe nicht verlohnen.*)

Aus eigner Erfahrung weiß ich, daß das Aufgeben solcher geometrischen Aufsätze einen großen und zweckmäßig geordneten Vorrath von Materialien voraus setzt, besonders wenn es einigermaßen planmäßig geschehen soll. Wer, ohne eine geordnete Sammlung solcher Materialien zu besitzen, seinen Schülern eine Arbeit dieser Art aufgeben will, hat irgend einen geometrischen Lehrsatz oder Aufgabe, sey es nun aus seinem Gedächtnisse oder aus irgend einem Buche, erst aufzusuchen. Er glaubt nun, einen Stoff gefunden zu haben, wie er zu seiner Absicht paßt. Wenn er aber Auflösung und Beweis etwas näher betrachtet, so findet er sehr häufig, daß seinen Schülern noch die nöthigen Vorkenntnisse fehlen. Er muß sich also nach einem andern Stoffe umsehen. Und so verliert er, bloß um den Stoff zu einem passenden Aufsatze aufzusuchen, oft ziemlich viele Zeit.

Diese Zeit wird ihm durch eine Sammlung erspart, die so geordnet ist, daß man leicht übersehen kann, was für Vordersätze bey jedem Lehrsatz oder Aufgabe vorausgesetzt werden.

---

der ihr zukommt. Vgl. Oster-Programm des Frankfurter Gymnasiums v. J. Th. Vömel. Frankf. 1823. S. 19 und 20.

*) Zu den Stylfehlern, welche die Schüler am häufigsten machen, gehört: a) daß sie einen falschen Modus conjugationis gebrauchen. Am schicklichsten scheint es, die Voraussetzungen durch den Conjunctiv: „Es sey ꝛc.", und die Constructionen durch die mit dem Conjunctiv vertauschte Imperativform: „Man mache ꝛc." auszudrücken. b) daß sie falsche Conjunctionen setzen. Um bestimmte Rechenschaft über den Gebrauch der Conjunctionen geben zu können, verweise ich den Lehrer auf Herling's Grundregeln des Deutschen Styls oder Periodenbau der Deutschen Sprache. Frankf. a. M. 1823. Die vierte Abtheilung S. 239 — 316 enthält eine Synonymik der Conjunctionen, nachdem von S. 38 — 56 die logische Eintheilung der Sätze abgehandelt worden ist.

Damit unsere Sammlung dieser Anforderung entspreche, steht oben von S. 3 — 26 das Verzeichniß der darin vorausgesetzten Sätze aus der Lehre von den Proportionen und aus der Elementar-Geometrie. Dieses Verzeichniß steht ganz vornen am Anfange des ersten Bandes (und nicht am Ende dieser Einleitung) damit es immer schneller gefunden wird, wenn man es nachschlagen will. In der Sammlung selbst deuten die Ueberschriften: „Nach §. 17"; „Nach §. 30"; „Nach §. 34" u. s. w. dahin, daß aus jenem Verzeichniß nur diejenigen Sätze zur Begründung der unter dieser Ueberschrift enthaltenen Aufgaben und Lehrsätze vorausgesetzt werden, welche bis zu dem überschriebenen Paragraphen ausgesprochen worden sind. (Die Ueberschriften: „Zu §. 28" u. s. w. haben einen ähnlichen Zweck, nur daß die darunter enthaltenen Aufgaben und Lehrsätze oder sonstigen Bemerkungen sich specieller auf den überschriebenen Paragraphen beziehen). — Die zu einzelnen schriftlichen Arbeiten anwendbaren Sätze sind mit „Artikel 1"; „Art. 2"; Art. 3" u. s. w. bezeichnet. Die meiste und am wenigsten bedingte Anwendbarkeit haben diejenigen Artikel, welche ausschließlich die in jenem Verzeichniß ausgesprochenen Sätze zu ihrer unmittelbaren Begründung voraussetzen. Andere Artikel aber können nur dann als Material des Unterrichts benutzt werden, wenn diejenigen in der Sammlung selbst befindlichen Artikel, auf die sie sich ihrer Begründung wegen berufen, im Unterrichte voran gegangen sind. Um dergleichen geometrische Sätze, die noch andere Hülfssätze, als die des Verzeichnisses, zu ihrer unmittelbaren Begründung bedürfen, schnell zu übersehen, und auch schnell zu finden, welches die hinzukommenden Hülfssätze sind, die sie voraussetzen, sind die Citationen der in der Sammlung früher stehenden Artikel den Propositionen unmitttelbar in Parenthese beygefügt. Unachtsamkeit von meiner Seite vorbehalten *), lassen sich also die Sätze der-

*) Wie leicht man in dergleichen Unachtsamkeitsfehler verfallen kann, wissen wir nicht nur aus eigner Erfahrung, die wir sehr

jenigen Artikel, deren Propositionen frey von beygefügten Citationen sind, bloß durch die bis zum überschriebenen Paragraphen gehenden Sätze des Verzeichnisses, ohne Anwendung neuer Hülfssätze begründen. *) Es lag mir daran, die Zahl dieser Sätze eher zu vermehren, als zu vermindern. Wäre es bloß darum zu thun gewesen, die in der Sammlung enthaltenen geometrischen Wahrheiten mitzutheilen, so hätte manche Wiederholung durch Vermehrung

---

häufig an uns selbst machen, sondern wir entdecken auch solche Verstöße sowohl in den Schriften der ausgezeichnetsten Mathematiker, als auch derjenigen Geometer und Lehrer der Geometrie, die sich bald wegen ihres gründlichen oder lückenlosen Gangs, bald wegen der Vorzüge ihrer besonderen Methode von der Möglichkeit zu irren selbst frey sprechen, und die bey Andern bemerkten Unachtsamkeiten auf die Fehlerhaftigkeit der von diesen beobachteten Methode schieben. Weiter unten werden mehre Beyspiele der letzten Art namhaft gemacht werden. — Wenn übrigens in unserer Sammlung schon vor §. 97 einige Auflösungen von Aufgaben vorkommen, die den Begriff und die Verzeichnung eines Kreises oder Kreisbogens voraussetzen, so ist dieses weniger als eine Unachtsamkeit, denn als eine besondere Freyheit anzusehen, die ich mir genommen habe; indem es jederzeit dem Lehrer bey seinem mündlichen Vortrage sehr leicht ist, den Begriff und die Verzeichnung des Kreises, wo er Anwendung davon machen muß, einzuschalten.

*) Sollte wegen übersehener Unrichtigkeiten der eine oder der andere Artikel wenigstens an der Stelle, wo er steht, unbrauchbar seyn, so kann ihn der Leser leicht durch ein Zeichen mit Bleystift bezeichnen, damit er ihm nicht zum zweytenmal Anstoß gebe. Durch einzelne dergleichen unbrauchbare Artikel würde die ganze Sammlung nichts an ihrer Brauchbarkeit verlieren, da die einzelnen Artikel im Ganzen von einander unabhängig sind, uud ihre Begründung bloß auf den Sätzen des voran geschickten Verzeichnisses beruht. — Es kann keine Arbeit größere Sorgfalt von Seiten des Arbeiters in Anspruch nehmen, als ihrer Bestimmung gemäß ist. Der Transporteur im Reißzeug, um ein analoges Beyspiel aus der materiellen Welt zu nehmen, kann nicht mit der Genauigkeit verfertigt werden, wie der Theodolit, der zur Gradmessung gebraucht wird.

der zur Auflösung oder zum Beweis erforderlichen Hülfssätze vermieden werden könnet. Umgekehrt habe ich mir vielmehr Mühe gegeben, die Anwendung der Hülfssätze, selbst da, wo dadurch die Form der Mittheilung gewonnen haben würde, zu beseitigen.

Da Zeitersparniß für den Lehrer eine Hauptberücksichtigung bey der Einrichtung unserer Sammlung war; so durften die Auflösungen und Beweise nicht angedeutet, sondern sie mußten ausgeführt werden. Der Lehrer, der einen geometrischen Satz aus der Sammlung aussuchen und sich auf seine Mittheilung vollständig vorbereiten will, soll höchstens einige Minuten Zeit dazu brauchen. Ganz streng ist jedoch eine ausschließliche Berücksichtigung des Zeitgewinns für den Lehrer nicht durchgeführt worden; indessen sind die Abweichungen sehr unbedeutend. Für das Gedächtniß des Schülers ist es z. B. eine große Erleichterung, wenn (was auch die Alten berücksichtigt haben; vgl. die Einleitung in die Uebersetzung des Euklid von Lorenz) die Buchstaben zur Bezeichnung der Theile einer Figur in alphabetischer Ordnung so gesetzt werden, wie diese Theile der Figur nach und nach entstehen. Dieß ist, wenn ich von einer Figur zum erstenmal Anwendung gemacht habe, auch fast immer geschehen. Zur Ersparung der Kupfer ist aber sehr häufig eine schon für einen andern Artikel gezeichnete Figur noch einmal angewandt worden; dann mußte freylich von jener Einrichtung abgewichen werden. Aber öfters wurde auch in dieser Abweichung noch weiter gegangen, indem zu der früher gebrauchten Figur noch Theile hinzu gezeichnet wurden, die mithin nicht für alle Auflösungen und Beweise passen, welche auf diese Figur verweisen. Da jedoch die Zeitersparniß nicht auf Kosten der pflichtmäßigen Vorbereitung, sondern nur die pflichtmäßige Vorbereitung in möglichst kurzer Zeit bezweckt werden soll; so kann diese sparsamere Einrichtung der Figuren nirgends Anstoß geben.

Die Hinweisung auf einen schon begründeten Satz, als Vordersatz, geschah meistens durch bloße Citation des entspre-

chenden Paragraphen. Euklid pflegt die früheren Sätze, auf die er sich beruft, vollständig zu wiederholen *). Dieß ist besonders beym mündlichen Vortrage des Schülers oder Lehrers sehr zu empfehlen. Ob die Schüler in ihren schriftlichen Aufsätzen die eine oder andere Art befolgen wollen, kann sehr füglich ihnen selbst überlassen bleiben. Am liebsten citiren sie gewöhnlich die §. §. des Lehrbuchs, was der Lehrer sehr gern sieht, indem sie dadurch mit dem Lehrbuche nur desto vertrauter werden. Die Durchsicht, ob sie die rechten §. §. citirt haben, wird dem Lehrer nicht sehr schwer, da derselbe durch die unaufhörliche Beschäftigung mit diesem Gegenstande die §. §. nach Zahl und Inhalt leicht auswendig lernt.

Der Vorrath von Materialien muß auch groß seyn, wenn die angegebenen Zwecke bestmöglich sollen erreicht werden können. Nach dem, was oben S. 137 über den Gebrauch derselben zu Repetitionen gesagt worden ist, könnte derselbe Schüler die Geometrie vier bis sechs mal lernen, bis er durchs Gymnasium durchkommt. Gleichwie man die Regeln der Grammatik bald an diesem bald an jenem Schriftsteller lernt; oder Rechnungsregeln bald an diesen bald an jenen Beyspielen: so kann man sich die Kenntniß und Anwendung der Hauptsätze aus der Elementar-Geometrie bald an diesen, bald an jenen Aufgaben oder Lehrsätzen geläufig machen, und bald an diesen, bald an jenen die Fertigkeit im Begreifen und Beweisen geometrischer Wahrheiten erwerben. Wenn man bedenkt, daß die geometrischen Aufsätze in mehren Classen des Gymnasiums zugleich aufgegeben werden sollen, und daß der

*) Außer den beträchtlichen Schwierigkeiten, welche damals die äußere Form der meisten Bücher dem Nachschlagen citirter Stellen in den Weg legte, war seine Absicht bey den erwähnten Wiederholungen unstreitig dahin gerichtet, die Lehren, die er dem Verstande seiner Schüler vorgelegt, zugleich ihrem Gedächtnisse einzuprägen, und sie ihnen recht geläufig zu machen". Lorenz a. a. O. in der Einl.

Lehrer seine guten Gründe haben kann, für jede Classe andere Aufsätze zu wählen; wenn es ferner gut ist, daß der Lehrer die Reihenfolge von Aufsätzen, die er in einem Cursus vorgenommen hat, nie unverändert wiederhole; wenn er ferner einige Aufgaben oder Lehrsätze, die für die Schüler ein besonderes Interesse haben, und die sich mehre Jahre lang ohne sein Zuthun von Schüler zu Schüler fortpflanzen, deßwegen nur sehr selten vortragen darf: so wird, sollte ich denken, ein großer Vorrath von Stoff, nicht als ein zweckloser Ueberfluß angesehen werden können.

Wenn Jemand unsere Sammlung von vorn bis hinten durchlesen, oder durcharbeiten, oder gar seinen Schülern vortragen wollte, so würde er den Zweck derselben ganz misverstehen. Er müßte in seinem Vorhaben bald ermüden. So wenig sich ein Lexikon zur zusammenhängenden Lectüre eignet; so wenig enthält unsere Sammlung einen fortlaufenden Unterricht.

Wer aber von unserer Sammlung einige Jahre hinter einander zum Aufgeben geometrischer Aufsätze Gebrauch gemacht hat, wird die Zahl derselben nicht mehr allzu überflüssig finden. Er wird sich unterdessen nach manchem in der Sammlung nicht enthaltenen Stoff zu neuen Aufsätzen umgesehen; die Sätze unserer Sammlung werden ihn zu manchen neuen Lehrsätzen und Aufgaben, die sich zum Vortrag für seine Schüler eignen, veranlaßt haben; er wird sich bewogen fühlen, den in unserer Sammlung enthaltenen Stoff auf mancherley Weise umzugestalten. — Zur Abwechselung der Beweise enthalten die Anmerkungen mancherley Winke. Dieselben liefern oft Stoff zu besonderen Aufgaben. — (Auch gehört hierher die Bemerkung, daß, wenn ein Beweis mehre Theile hat, sich diese Theile sehr gut von einander als besondere Sätze trennen, und umgekehrt, sich oft mehre Sätze zu einem einzigen, je nach dem Bedürfniß, vereinigen lassen).

Besonders lebhaft wird das Bedürfniß nach Stoff beym Vortrag derjenigen Abschnitte der Elementar-Geometrie gefühlt, welche die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke noch nicht

voraussetzen. Aus der vortrefflichen, aus zwey Bänden bestehenden, Sammlung von Meier Hirsch gehört z. B. nur der Abschnitt von der Verwandlung der Figuren, und dieser nicht einmal ganz, hierher. Es kam also gerade in diesen Abschnitten der Elementar-Geometrie darauf an, den Stoff nicht spärlich zuzumessen. Daher ist der erste Band ausschließlich diesen Abschnitten gewidmet, unter welche überdem noch die Sätze aus der Lehre vom Kreise im zweyten Bande, welche die Aehnlichkeit der Dreyecke nicht voraussetzen, gerechnet werden müssen. Der Leser wird unter denselben manche Sätze finden, die ihm vielleicht noch nie begegnet sind. Um so lieber wird er die Aufnahme anderer sehr leichter und bekannter Sätze entschuldigen, welche ich, der Bestimmung dieser Sammlung wegen, nur ungern ausgelassen haben würde. Auch wird er es hoffentlich nicht tadeln, daß manche Aufgaben und Lehrsätze (z. B. die Aufgabe, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, §. 72; manche Sätze über Dreyecke, welche gleiche Winkel haben, u. s. w.) früher herbey gezogen worden sind, als es sonst in wohl geordneten Systemen der Geometrie zu geschehen pflegt. Dergleichen früher herbey gezogene Sätze finden unter andern dann eine sehr vortheilhafte Anwendung, wenn in einer Classe noch jüngere Schüler sind. Dann bekommen die älteren und jüngeren Schüler zugleich etwas, das jene interessirt, und von diesen verstanden werden kann. — (Hierher gehört auch die Bemerkung, daß nicht nur die Aufgaben meist früher vorgenommen werden können, als an der Stelle, an der sie stehen — so kommen z. B. vor §. 62 gar keine Aufgaben vor —, sondern daß auch manche Lehrsätze, weil es zweckmäßig schien, sie mit andern verwandten Sätzen zusammen zu stellen, erst später stehen, als sie durchaus ihrer Begründung wegen stehen mußten. Am Schlusse der Sammlung wird sich auf eine sehr kurze und leicht zu übersehende Art das Verzeichniß dieser Sätze mit der Bemerkung der Stelle, wo sie schon angewandt werden können, beybringen lassen).

Wenn mich die **geometrischen Aufsätze** ursprünglich allein bewogen haben, einen großen Vorrath von Lehrsätzen und Aufgaben zu sammeln; so bestimmte mich die vielseitige Anwendbarkeit einer solchen Sammlung als Material des Unterrichtes zur Herausgabe im Druck. Außer dem Stoff zu schriftlichen Aufsätzen liefert diese Sammlung

1) dem Lehrer

a) Stoff, um die Anwendbarkeit der Hauptsätze der Elementar-Geometrie (oder namentlich die Anwendbarkeit eines eben in der Lehrstunde vorgekommenen Satzes, der nicht vergessen werden darf), zur Begründung anderer geometrischen Wahrheiten durch Beyspiele zu zeigen, bey welchen Beyspielen es nicht darauf ankommt, ob sie von allen Schülern der Classe vollkommen gefaßt und behalten worden. Vorzüglich bey Repetitionen ist es gut, wenn der Lehrer einen großen Vorrath von Materialien besitzt, damit er nicht nöthig habe, denselben Schülern dieselben Beyspiele zum zweytenmal zu geben. So zweckmäßig und nothwendig die Repetitionen der Hauptsätze sind, so verwerflich ist das öftere Wiederholen der anderen Sätze, die wieder vergessen werden dürfen. In jedem Unterrichte müssen Haupt- und Nebenpartien seyn, ähnlich dem Licht und Schatten in einem Gemälde. Der Unterricht gewinnt, wenn beyde recht neben einander abstechen.

b) Stoff zu socratisirenden Vorträgen, namentlich

α) zu solchen, wobey die Classe wetteifernd antwortet. Wenn ein oder einige Schüler in der Classe wären, die mit dem vorzunehmenden Stoff schon vertraut wären, so müßte diesen das Reden verboten, oder die Socratik könnte so nicht angewandt werden.

β) Aber auch bey solchen socratisirenden Vorträgen, wo die Fragen an den einen oder den andern Schüler gerichtet werden, ist es zweckmäßig, die Aufmerksamkeit der übrigen Schüler dadurch zu fesseln, daß ein ihnen noch unbekannter Satz durchgegangen wird, über den sie hinterher zur Rechenschaft gezogen werden können.

c) Stoff zu heuristischen Uebungen,

α) wo der Lehrer die Proposition des zu beweisenden Lehrsatzes oder der aufzulösenden Aufgabe ausspricht, und dem Schüler die Findung des Beweises oder der Auflösung aufgibt.

(1) Von leichterer Art. Hierher gehören vorzüglich solche Lehrsätze, in deren Beweis die Schlußkette sehr kurz ist, und solche Aufgaben, bey denen nur eine oder sehr wenige Constructionen in der Auflösung Statt finden; d. h. solche Lehrsätze und Aufgaben, die sich beynahe als Zusätze aus andern bereits bekannten Sätzen ergeben. Es lag Anfangs nicht in meinem Plane, dergleichen Sätze in unsere Sammlung aufzunehmen, da Beweis und Auflösung zu kurz sind, um zu schriftlichen Aufsätzen angewandt werden zu können. Erst später (nachdem schon der größte Theil der Arbeit vollendet war) kam ich auf den Gedanken, bloß die Propositionen derselben, der leichteren heuristischen Uebungen wegen) mitzutheilen, und so werden denn mitunter (im Ganzen planlos und lückenhaft) die einzelnen Artikel der Sammlung durch solche mit a, b, c u. s. w. bezeichnete Propositionen oder auch bloße Fragen unterbrochen, deren Begründung und Beantwortung dem Leser überlassen bleibt.

Zu diesen heuristischen Uebungen der leichteren Art geben ferner die Anmerkungen mannigfaltigen Stoff. Ohne die eigentliche Bedeutung der Anmerkung unter den geometrischen Sätzen, aus denen ein System der Geometrie besteht, zu verkennen, habe ich nämlich Alles, was nicht zu einem geometrischen Aufsatze selbst gehörte, in die Anmerkungen geworfen. Man findet daher sehr viele darunter, die eigentlich Zusätze hätten überschrieben werden sollen.

Zu den heuristischen Uebungen der leichteren Art können auch noch Lehrsätze mit längeren Beweisen, und Aufgaben mit längeren Auflösungen benutzt werden, wenn der Lehrer socratisirend einzelne Glieder aus der Schlußkette des Beweises, oder einzelne Ruhepunkte der Auflösung, den Schülern feststellt.

Ueberhaupt eignen sich dergleichen heuristische Uebungen der leichteren Art wohl noch für den gemeinschaftlichen Unterricht einer

Classe; dagegen die schwereren heuristischen Uebungen entweder nur bey ganz individueller Behandlung eines oder mehrer Schüler, oder zu Privatarbeiten außer der Schule, anwendbar sind.

(2) Zu den heuristischen Uebungen der schwereren Art können die Propositionen der einzelnen Artikel der Sammlung selbst als Themata gebraucht werden. Man wird mir nicht einwenden, daß ihrer Anwendbarkeit gerade das Beysammenstehen in unserer Sammlung hinderlich sey, indem es nunmehr den Schülern ein Leichtes werde, sich die Auflösungen und Beweise ohne eignes Nachdenken zu verschaffen. Denn einen unerlaubten Gebrauch der Art werden die Schüler nicht machen. Charakterlos und schwach ist wohl die Jugend, allein heuchlerisch ist sie selten. Jene beyden Eigenschaften sind natürlich, weil Charakter und Willenskraft noch nicht entwickelt sind. Im Collisionsfalle erlaubt sich daher der Schüler, den Lehrer zu hintergehen, wenn er die Bequemlichkeit des Gebrauches unerlaubter Hülfsmittel der eigenen Anstrengung vorzieht, oder wenn seine, verschuldete oder unverschuldete, Unfähigkeit mit Strafe bedroht wird. Dergleichen Unredlichkeiten einzelner Schüler erfahre ich (wie jeder andere Lehrer wahrscheinlich auch) täglich. Allein in den dreyzehn Jahren, daß ich die Mathematik an Gymnasien unterrichte — und gleich von Anfang an habe ich den Schülern Themata zum Selbstfinden aufgegeben — ist mir, meines Wissens, noch kein Fall vorgekommen, daß ein Schüler eine fremde Arbeit für seine eigne Erfindung ausgegeben hätte. Es versteht sich aber auch von selbst, daß bey dergleichen Arbeiten gar kein Zwang Statt finden kann. Wem es eigene Talente und schon erworbene Kenntnisse nicht möglich machen, und wen Hoffnung und Freude des Gelingens nicht mehr reizen, als es jeder andere Antrieb zu thun vermöchte, an dem sind alle Versuche der Gewalt (seyen sie feinerer oder gröberer Art; zu den feineren zähle ich Ehre und Schande) zur Hervorbringung solcher eigenthümlichen Geistesproducte vergeblich *).

*) Meine Schüler begehen keine verbotene Handlung, wenn sie sich

β) Zur Veranlassung von heuristischen Uebungen, wo der Lehrer die Proposition des zu beweisenden Lehrsatzes oder der aufzulösenden Aufgabe nicht ausspricht, dient die Betrachtung, daß oft sehr viele Lehrsätze und sehr viele Aufgaben unter einander verwandt sind. Der Lehrer behandelt z. B. mit den Schülern die Aufgabe: „Die Grundlinie eines Dreyecks, die Summe der beyden andern Seiten und der Winkel an der Spitze sind gegeben; man soll das Dreyeck verzeichnen" (s. unten nach §. 62.); und nun verlangt er, die Schüler sollen sich ähnliche Aufgaben selbst denken und auflösen.

2) Diese Sammlung kann auch für den Selbstunterricht benutzt werden, wenn nämlich der Leser nicht etwa von vorn bis hinten fortarbeitet, sondern sich einzelne Artikel aussucht, an denen er sich übe. Schon die Proposition eines Satzes oder die dazu gehörige Figur läßt einigermaßen auf das Interesse schließen, das die nähere Bekanntschaft mit demselben gewähren werde. Es wäre vielleicht nicht unzweckmäßig, wenn auch solche, welche die Fortsetzung des mathematischen Studiums bereits aufgegeben haben, noch von Zeit zu Zeit, damit ihnen das mathematische Denken nicht ungewohnt werde, ihre Geschicklichkeit an dem einen oder andern geometrischen Satze versuchten. Eine Sammlung, wie die unsrige, in welcher die einzelnen Artikel unter einander nicht zusammen hängen, könnte eine solche Absicht am leichtesten erreichen lassen.

---

diese Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen anschaffen. Im Gegentheil kann sie ihnen zur Erweiterung ihrer geometrischen Kenntnisse recht nützlich werden. Daß sie keinen unerlaubten Gebrauch davon machen, dafür läßt sich sorgen.

Sammlung
geometrischer Aufgaben
und
Lehrsätze.

Nach §. 27.

Art. 1. Lehrsatz. Wenn von zwey Dreyecken, welche auf derselben Grundlinie stehen, das eine ganz innerhalb des andern fällt; so ist der der Grundlinie gegen über stehende Winkel im ersten größer als im zweyten.

Bew. (Fig. 9). BCA sey das äußere, BCD das innere Dreyeck, BC die gemeinschaftliche Grundlinie. Man verlängere BC über ihren einen Endpunkt hinaus nach E, und ziehe durch C die CF ∥ BA und die CG ∥ BD; so ist

W. FCE = ABC
und } §. 16.
W. GCE = DBC

Da nun BD zwischen BC und BA fällt, so ist

W. ABC > DBC

also ist auch

W. FCE > GCE.

Daher ist

W. ACE − FCE < ACE − GCE

oder

W. ACF < ACG

Um so mehr ist

W. ACF < DCG

Nun ist

W. BAC = ACF
und } §. 17.
W. BDC = DCG

folglich ist auch

W. BAC < BDC.

Zu §. 28.

Art 2. Lehrs. Die drey Winkel eines Dreyecks sind zusammen jedesmal gleich zweyen Rechten.

Bew. (Fig. 10). Man ziehe durch eine beliebige Ecke C des △ ABC eine Linie DE ‖ mit der gegen über liegenden Seite AB; so ist

W. w = x } als Wechselswinkel. }
W. v = y
und W. z = z (Ax.)

also (Ax.)

$$w + v + z = x + y + z$$

Nun ist aber w + v + z = 2 R. (§. 11). Folglich ist auch x + y + z = 2 R. (Ax.).

(Proclus Baroc. p. 228.)

Anm. Nach Proklus schreibt Eudemus die Erfindung dieses Satzes, und namentlich dieses Beweises, den Pythagoräern zu.

Nach §. 30.

Art. 3. Lehrs. Wie Art. 1.

Bew. (Fig. 11). BCA sey das äußere, BCD das innere Dreyeck, BC die gemeinschaftliche Grundlinie. Man verlängere die eine Seite BD des inneren Dreyecks bis zum Umfange des äußeren Dreyecks in E; so entstehen noch die Dreyecke BAE und DEC. In dem △ BAE ist die Seite AE nach C verlängert, also W. BEC > BAC (§. 30). Ferner ist in dem △ DEC die Seite ED nach B verlängert, also der W. BDC > BEC. Um so mehr ist folglich der W. BDC > BAC.

Art. 4. Lehrs. Wie Art. 1.

Bew. (Fig. 12). BCA sey das äußere, BCD das innere Dreyeck, BC die gemeinschaftliche Grundlinie. Man verbinde die Ecken A und D beyder Dreyecke durch die gerade Linie AD, und verlängere dieselbe nach E; so ist im Dreyeck BAD der W. BDE der äußere und BAE einer der innern gegen über stehenden Winkel, also

W. BDE > BAE.

Eben so ist im △ DAC der W. EDC der äußere Winkel, und EAC einer der innern gegen über stehenden, also

W. EDC > EAC,

folglich (Ax.)

W. BDE + EDC > BAE + EAC

oder

BDC > BAC.

Art. 5. Lehrs. Wie Art. 1.

Bew. (Fig. 12). BCA sey das äußere, BCD das innere Dreyeck, BC die gemeinschaftliche Grundlinie.

Da BD zwischen BC und BA fällt, so ist

W. DBC < ABC

Eben so ist

W. DCB < ACB

also

W. DBC + DCB < ABC + ACB

daher

2 R. — (DBC + DCB)
> 2 R. — (ABC + ACB)

Nun ist

2 R. — (DBC + DCB) = BDC

und

2 R. — (ABC + ACB) = BAC

Folglich ist

W. BDC > BAC.

Art. 6. Lehrs. Auf einer geraden Linie gibt es jedesmal nur einen Punkt, von welchem aus zwey andere gerade Linien, nach zweyen gegebenen Punkten außerhalb der ersten Linie gezogen, mit dieser gleiche Winkel machen.

Bew. (Fig. 13). Es sey MN eine gerade Linie, und A und B seyen zwey Punkte außerhalb derselben. Auf MN sey E ein Punkt von solcher Beschaffenheit, daß, wenn von ihm aus die geraden Linien EA und EB nach A und B gezogen werden, die beyden Winkel AEN und BEM einander gleich seyen.

Es sey F irgend ein anderer Punkt zwischen E und N;

man ziehe FA und FB: so ist in dem △ AEF die Seite EF nach N verlängert, also W. AFN > AEN.

In dem △ BFE ist die Seite FE nach M verlängert, also W. BFE < BEM.

Es ist also auch, da nach der Voraussetzung W. BEM = AEN ist,

W. BFE < AEN

Um so mehr ist also, da AEN < AFN ist,

W. BFE < AFN

Auf ähnliche Art würde der Beweis geführt werden, wenn der Punkt F zwischen E und M läge.

Es gibt also auf der geraden Linie MN nur einen Punkt E, für welchen, wenn A und B gegebene Punkte sind, die Winkel AEN und BEM einander gleich sind.

Art. 7. Lehrs. Wenn die Seiten eines Fünfecks nach beyden Seiten verlängert werden, bis je zwey einander schneiden, so schließen dieselben 5 Winkel ein, welche zusammen zwey Rechte betragen.

Bew. (Fig. 14). Im Fünfeck ABCDE durchschneiden sich die verlängerten Seiten in den Punkten F, G, H, I und K; so ist zu beweisen, daß die fünf Winkel F, G, H, I und K zusammen 2 Rechte betragen.

Im △ BKH ist die Seite HB nach F verlängert, also (§. 29)

W. FBA = K + H

Im △ AGI ist die Seite IA nach F verlängert, also (§. 29)

W. FAB = I + G

Es ist daher

W. FBA + FAB + F = K + H + I + G + F

Da nun FBA + FAB + F, als die drey Winkel des Dreyecks FAB zusammen 2 Rechte betragen (§. 28); so betragen die fünf Winkel K + H + I + G + F ebenfalls 2 Rechte.

(Clavius p. 57, ex Campano.)

Anm. 1. Auch läßt sich der Beweis auf den Satz (§. 34) gründen, daß die fünf Winkel eines jeden Fünfecks zusammen 6 Rechte betragen. Es ist also

$$W.\ FAB + GBC + HCD + IDE + KEA = 10\ R. - 6\ R. = 4\ R.$$

Eben so ist

$$W.\ FBA + GCB + HDC + IED + KAE = 10\ R. - 6\ R. = 4\ R.$$

Mithin betragen diejenigen 10 Winkel der fünf Dreyecke AFB, BGC, CHD, DIE und EKA, welche Nebenwinkel der fünf Winkel des Fünfecks sind, zusammen 8 Rechte. Da nun die 15 Winkel dieser 5 Dreyecke zusammen 10 Rechte betragen, so betragen noch die fünf Winkel

$$F + G + H + I + K = 10\ R. - 8\ R. = 2\ R.$$

Anm. 2. Wenn zwey Seiten des Fünfecks einander parallel sind, so können sich diese zwey nicht schneiden. Dann ist der Winkel, den sie einschließen, gleich Null; und die vier übrigen Winkel betragen zusammen 2 Rechte.

Wenn dagegen zwey Seiten des Fünfecks, wie DC und AB (Fig. 15), über C und B hinaus verlängert, divergirten; so ist der Winkel BGC, den ihre über D und A hinaus gehenden Verlängerungen mit einander machen, als ein negativer Winkel zu betrachten. Wenn man diesen fünften Winkel von der Summe der vier andern abzieht, so ist der Rest noch = 2 R. Denn nun ist

$$W.\ FIC + IFC + FCI = 2\ R.$$

aber

$$W.\ FCI = CHD + CDH = CHD + AKE - KGI$$

also

$$W.\ FIC + IFC + CHD + IKE - KGI = 2\ R.$$

Auf ähnliche Art ist (Fig. 16)

$$W.\ AKE + AGC + CHE - AIG - HFE = 2\ R.$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} 2\ R. &= AKE + CHE + ABC \\ &= AKE + CHE + AGC - GCB \\ &= AKE + CHE + AGC - (AIG + HFE) \\ &= AKE + CHE + AGC - AIG - HFE \end{aligned}$$

Hier sind also die zwey Winkel AIG und HFE als negative Winkel zu betrachten, weil sowohl die beyden Seiten AE und CD nicht über E und D, als auch die beyden Seiten EA und CB nicht über A und B hinaus verlängert werden dürfen, um sich zu schneiden, wie in Fig. 14 vorausgesetzt worden ist.

Anm. 3. Anwendung davon auf mehrseitige Figuren. Hierher gehört unter andern der

Lehrsatz. Wenn man die Seiten eines Sechsecks nach beyden Seiten verlängert, bis sich je zwey einander schneiden, so schließen dieselben sechs Winkel ein, welche zusammen vier Rechte betragen.

Nach §. 34.

Art. 8. Lehrs. In jeder gleichwinkligen Figur von gerader Seitenzahl sind die gegen über liegenden Seiten einander parallel.

Bew. Es sey z. B. ABCDEFGH (Fig. 17) ein Achteck, dessen Seiten lauter gleiche Winkel einschließen; AB liege der EF, BC der FG, CD der GH, und DE der AH gegen über.

Man ziehe BE, so wird dadurch vom Achteck das Sechseck ABEFGH abgeschnitten, dessen 6 Winkel zusammen 8 Rechte betragen. Da die 8 Winkel des Achtecks 12 Rechte betragen, so machen die vier Winkel A, H, G und F zusammen 6 Rechte aus.

Zieht man diese von den 6 Winkeln des Sechsecks ab, so bleiben die zwey Winkel ABE und BEF zusammen noch 2en Rechten gleich.

Es ist also AB ll EF (§. 19).

Auf ähnliche Art wird der Beweis für jedes andere gleichwinklige Vieleck von gerader Seitenzahl geführt.

(Clavius p. 62, ex Proclo).

Art. 9. Lehrs. Wenn die drey Seiten eines Dreyecks den drey Seiten eines andern parallel sind, so sind die drey Winkel in jenem den drey Winkeln in diesem gleich.

Bew. (Fig. 18). In den beyden Dreyecken ABC und DEF sey AB ∥ DE, AC ∥ DF und BC ∥ EF.

Da AC gegen AB geneigt, und DE ∥ AB ist, so ist AC auch gegen DE geneigt. Die beyden Seiten AC und DE werden also, gehörig verlängert, sich in einem Punkte G durchschneiden. Nun ist

W. CAB = CGD (§. 16)

und

W. FDE = CGD (§. 16)

also

W. CAB = W. FDE.

Eben so, da BC gegen AC geneigt, und BC ∥ EF ist, so ist auch EF gegen AC geneigt. Die beyden Seiten AC und EF werden also, gehörig verlängert, sich in einem Punkte H durchschneiden. Nun ist

W. ACB = AHE

und

W. DFE = AHE

also

W. ACB = DFE

Da nun in den beyden Dreyecken ABC und DEF zwey Winkel des einen zweyen Winkeln des andern gleich sind, so ist auch der dritte Winkel in beyden gleich, oder W. ABC = DEF.

(Legendre III. prop. XXI).

Art. 10. Lehrs. Wenn die drey Seiten eines Dreyecks auf den drey Seiten eines andern senkrecht sind, so sind die drey Winkel in jenem den drey Winkeln in diesem gleich. [Art. 9.]

Bew. (Fig. 19). Es sey ABC ein Dreyeck ganz innerhalb des Dreyecks DEF, und es seyen die Seiten BA, AC, CB senkrecht auf den Seiten ED, DF, EF, auf welche sie, verlängert, in den Punkten G, H, I treffen.

In dem Viereck AGDH sind bey G und H rechte Winkel; also ist noch, da die vier Winkel eines jeden Vierecks zusammen vier Rechte betragen (§. 34)

W. GAH + EDF = 2 R.

Es ist aber auch (§. 10)

W. GAH + BAC = 2 R.

also

W. GAH + BAC = GAH + EDF

folglich

W. BAC = EDF

Eben so läßt sich beweisen, daß W. ABC = DEF und W. BCA = EFD ist.

Folglich sind die drey Winkel des ganz innerhalb des △ DEF gelegenen Dreyecks ABC den drey Winkeln des Dreyecks DEF gleich.

Das Dreyeck, dessen Seiten auf den Seiten des Dreyecks EDF senkrecht stehen, kann nun aber mancherley Lagen gegen dieses Dreyeck EDF haben. In jedem Fall läßt sich aber ein △ ABC innerhalb des Dreyecks EDF construiren, dessen Seiten mit den Seiten jenes Dreyecks parallel laufen, dessen Seiten also ebenfalls auf den Seiten des △ EDF senkrecht stehen. Nun hat das △ BAC sowohl mit jenem Dreyeck (Art. 9), als mit dem △ EDF gleiche Winkel. Folglich haben auch jenes Dreyeck und das △ EDF gleiche Winkel.

(Legendre III, prop. XXI).

Art. 11. Lehrs. Wenn man auf jedem der Schenkel eines gegebenen Winkels ein Perpendikel errichtet, so durchschneiden sich beyde Perpendikel unter einem Winkel, welcher dem gegebenen Winkel gleich ist.

Bew. (Fig. 20). BAC sey der gegebene Winkel, DE sey senkrecht auf AC und FG senkrecht auf AB.

Da GF auf AB senkrecht und AB gegen AC geneigt ist, so kann GF nicht auch auf AC senkrecht stehen. DE und GF sind also einander nicht parallel. Sie werden also, gehörig verlängert, einander in einem Punkte H schneiden.

Der Durchschnittspunkt beyder Perpendikel fällt entweder innerhalb des Winkels, oder außerhalb desselben.

In jenem Falle ist W. FIH = AID, als correspondirende Winkel; in diesem Falle ist W. FIH = AID, als Scheitelwinkel.

In beyden Fällen ist W. IFH = ADI, als rechte Winkel.

Also ist auch in beyden Fällen der dritte Winkel IHF des △ IHF dem dritten Winkel BAC des △ ADI gleich.

(Gilbert S. 87).

Anm. Die Anwendung dieses Satzes auf den Fall, wo der Durchschnittspunkt beyder Perpendikel auf den einen Schenkel des Winkels fällt, ist leicht.

a. Lehrs. In jeder Figur von gerader Seitenzahl, in welcher die gegen über liegenden Seiten parallel sind, sind die gegen über liegenden Winkel einander gleich.

Man denke sich in Fig. 17 die Diagonale AE gezogen, so ist W. EAB = AEF, und W. EAH = AED. U. s. w.

b. Lehrs. Wenn man eine jede Seite einer geradlinigen Figur, die lauter ausgehende Winkel hat, über einen ihrer Endpunkte, entweder alle nach der rechten oder alle nach der linken Seite hin, verlängert; so betragen die dadurch entstehenden äußeren Winkel zusammen jedesmal 4 Rechte.

Der Beweis gründet sich auf den Satz, daß die Winkel eines jeden Vielecks so viel mal 2 Rechte betragen, als die Figur Seiten hat, weniger zwey.

Anm. Zeichnet man sich ein solches Vieleck, z. B. ein Fünfeck, dessen Seiten man auf die angegebene Art verlängert, und denkt man sich die verlängerten Seiten parallel mit sich selbst nach dem Innern der Figur fortgerückt, bis die Figur selbst zu einem Punkte verschwindet; so erhält man auch fünf Winkel um einen Punkt herum, die zusammen 4 Rechte betragen.

c. Lehrs. Die äußeren Winkel an den drey Ecken eines jeden Dreyecks zusammen genommen betragen jedesmal 4 Rechte.

d. Welche regulären Figuren haben allein die Eigenschaft, daß sie um einen Punkt herum den ganzen Raum ausfüllen?

Antw. Das reguläre Dreyeck, Viereck und Sechseck. Der Beweis leicht. — Proklus nennt den Satz einen bewundernswürdigen Lehrsatz, der von Pythagoras erfunden sey. Procl. Baroc. p. 174.

e. Lehrs. Wenn aus der Spitze eines Dreyecks ein Perpendikel auf die Grundlinie (§. 26) gefällt wird; so liegt dieses innerhalb des Dreyecks, wenn beyde Winkel an der Grundlinie spitz, hingegen außerhalb des Dreyecks, wenn einer der beyden Winkel stumpf ist.

Der Beweis ergibt sich leicht aus §. 30.

(Van Swinden S. 32).

f Lehrs. Wenn zwey Winkel, deren Oeffnung nach einerley Seite gerichtet ist, parallele Schenkel haben, so sind sie einander gleich.

Anm. Von diesem Satze hätte in dem Beweise von Art. 9 Anwendung gemacht werden können. Der Satz §. 144 der Stereometrie ist eine Verallgemeinerung desselben.

Zu §. 37.

Anm. 1. Unter die Fälle, in welchen ein Dreyeck durch drey Data bestimmt ist, gehört vorzüglich auch

die Bestimmung durch zwey Seiten und einen anliegenden Winkel.

In diesem Falle gibt es jedoch unter gewissen Bedingungen zweyerley Dreyecke, welche die zwey Seiten und den anliegenden Winkel enthalten.

Es seyen in dem Dreyeck ABC (Fig. 21) die Seiten AB, BC und der der ersten Seite anliegende W. A gegeben. Wenn BC $<$ BA und BC nicht senkrecht auf AC ist, so kann BC auch die Lage BC′ haben, und es gibt noch ein zweytes Dreyeck ABC′, das die drey Data ebenfalls enthält. Denn fällt man das Perpendikel BD auf AC, und nimmt man

DC′ $=$ DC, so ist $\triangle$ BDC′ $\cong$ BDC (§. 37. b.), also BC′ $=$ BC.

Anm. 2. Die Zweydeutigkeit der Bestimmung eines Dreyecks durch zwey Seiten und einen anliegenden Winkel (Anm. 1) fällt weg, wenn der der größeren (oder auch gleichen) Seite gegen über liegende Winkel gegeben ist. Wenn (Fig. 21) AB und BC und der W. C gegeben sind, und AB $>$ BC ist, so gibt es nur ein Dreyeck ABC, das die gegebenen Stücke enthält. Insbesondere gehört hierher der Satz:

Ein rechtwinkliges Dreyeck ist durch die Hypotenuse und den einen Katheten vollkommen bestimmt.

Denn hier liegt der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegen über.

Anm. 3. Uebrigens dürfen nicht in allen Fällen, in welchen ein Dreyeck durch drey Stücke bestimmt werden kann, alle drey Bestimmungsstücke ganz nach Willkühr genommen werden. Unter den (§. 37) bereits angeführten Fällen können diese drey Bestimmungsstücke nur bey zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ohne weitere Berücksichtigung genommen werden. Dagegen bey drey Seiten müssen zwey Seiten zusammen größer als die dritte seyn (vgl. §. 53), und bey einer Seite und zwey Winkeln müssen die zwey Winkel zusammen weniger als zwey rechte betragen (§. 28). — Bey zwey Seiten und einem anliegenden Winkel (Anm. 1) darf die Seite BC (Fig. 21) nicht kleiner als das Perpendikel BD seyn; und wenn der W. A ein stumpfer oder rechter Winkel ist, so muß BC $>$ AB seyn.

Nach §. 41.

Art. 12. Lehrs. Wenn man aus dem rechten Winkel eines rechtwinkligen Dreyecks eine gerade Linie nach der Mitte der Hypotenuse zieht, so ist dieselbe der halben Hypotenuse gleich.

Bew. (Fig. 22). Es sey in dem rechtwinkligen Dreyeck CAB die Linie AD aus dem rechten Winkel A nach der Mitte D der Hypotenuse CB gezogen.

Man ziehe DF ‖ BA und DE ‖ CA; so ist

DC = DB (Voraussſ.)

und
W. CDF = DBE
W. DCF = BDE } §. 16.

also

△ CDF ≌ DBE (§. 40)

daher

FD = EB (§. 41)

Ferner ist

AD = AD (Ax.)

und
W. FAD = ADE
W. FDA = DAE } §. 17.

also

△ FAD ≌ ADE (§. 40)

daher auch

FD = AE (§. 41)

Da nun sowohl EB, als auch AE = FD ist; so sind beyde unter einander gleich. Da ferner ED ‖ AF, und W. FAD ein rechter ist, so sind auch DEA und DEB rechte Winkel (§. 18 und 16). Es ist also

DE = DE
EA = EB

und

W. DEA = DEB

also

△ DAE ≌ DEB (§. 39)

folglich

AD = DB (§. 41)

Anm. 1. Beschreibt man von D als Mittelpunkt aus mit dem Halbmesser DA = DB = DC einen Kreis, so ist

BC ein Durchmesser desselben und W. BAC ist ein Winkel an der Peripherie dieses Kreises, dessen Schenkel auf den Endpunkten des Durchmessers BC stehen. Durch unsern Lehrsatz ist daher auch der Satz direct bewiesen: daß, wenn die Schenkel irgend eines rechten Winkels auf den Endpunkten des Durchmessers eines Kreises stehen, der Scheitelpunkt des Winkels jedesmal auf die Peripherie des Kreises fällt.

Anm. 2. Obgleich der Satz an sich nur geringes Interesse hat, so ist er doch für die Anfänger als ein Beyspiel der Anwendung der Sätze von der Congruenz der Dreyecke (§. 38—40), das wieder vergessen werden darf, sehr brauchbar.

Art. 13. Lehrs. Wenn man eine Seite eines Dreyecks verlängert, so ist der äußere Winkel jedesmal größer als ein jeder der beyden innern gegen über stehenden.

Bew. (Fig. 23). Es sey von dem Dreyeck ABC die Seite BC nach D verlängert, so ist ACD der äußere Winkel; ABC und BAC sind die beyden innern gegen über stehenden.

Man halbire AC in E, ziehe BE und verlängere sie nach F, nehme EF = BE und ziehe CF; so ist

AE = EC (Constr.)
BE = EF (Constr.)

und

W. AEB = FEC, als Scheitelwinkel,

also

$\triangle$ CEF $\cong$ BEA (§. 39)

daher

W. FCE = EAB (§. 41)

Nun ist ACD > FCE; folglich ist ACD auch > EAB.

Wenn man die Seite AC nach G verlängert, so ist W. BCG = ACD, als Scheitelwinkel. Von diesem Winkel BCG läßt es sich auf eine ähnliche Art beweisen, daß er > ABC ist, indem man die Seite BC halbirt. Es ist also auch ACD > ABC.

(Euklid I. Satz 16).

Anm. Obgleich in dem Lehrbuche (§. 28—30) der Satz, daß der äußere Winkel eines Dreyecks größer als ein jeder der beyden innern gegen über stehenden ist, der Congruenz der Dreyecke voran geht; so durfte hier doch ein Beweis gegeben werden, der sich auf die Congruenz der Dreyecke gründet, weil die Congruenz der Dreyecke (§. 35 ff.) die Sätze (§. 28—30) gar nicht voraussetzt.

Art. 14. Lehrs. In jedem Dreyeck sind zwey Winkel zusammen kleiner als zwey Rechte. [Art. 13.]

Bew. (Fig. 23). Im Dreyeck ABC verlängere man eine Seite BC nach D, so ist ABC < ACD (Art. 13), also ABC + ACB < ACD + ACB. Nun ist ACD + ACB = 2 R. (§. 10). Folglich ist ABC + ACB < 2 R.

Auf ähnliche Art wird dieses von BAC + ACB und von CAB + ABC bewiesen.

(Euklid I. Satz 17).

Art. 15. Lehrs. Wenn man auf allen Seiten eines regelmäßigen Vielecks (auf dessen Umfang nach einer bestimmten Richtung herum gehend) Punkte nimmt, die von den nächsten Ecken gleich weit entfernt sind: so werden die geraden Linien, welche diese Punkte vereinigen, ein regelmäßiges Vieleck von eben so vielen Seiten machen, als das gegebene Vieleck selbst hat.

Bew. (Fig. 24). ABCDE sey ein reguläres Vieleck, die Punkte F, G, H, I, K seyen auf den Seiten AE, ED, DC, CB, BA so genommen, daß AF = EG = DH = CI = BK ist, und es seyen die geraden Linien FG, GH, HI, IK, KF gezogen.

Die Figur FGHIK hat eben so viele Seiten als die gegebene ABCDE.

Da AF = EG und AE = ED ist, so ist auch AE — AF = ED — EG, oder FE = GD; ferner ist EG = DH und W. E = D, also △ FEG ≌ GDH (§. 39), mithin FG = GH, und W. EGF = DHG.

Eben so, wie man bewiesen hat, daß FG = GH ist, wird auch bewiesen, daß GH = HI, HI = IK u. s. w. ist. Also hat die Figur FGHIK lauter gleiche Seiten.

Da ferner ED = DC und EG = DH ist, so ist auch ED — EG = DC — DH, oder DG = CH; ferner ist DH = CI und W. D = C, also △ GDH ≅ HCI (§. 39) mithin W. DGH = CHI.

Nun ist

W. EGF + DGH + FGH = 2 R. (§. 11).

und

W. DHG + CHI + GHI = 2 R. (§. 11)

also

W. EGF + DGH + FGH = DHG + CHI + GHI.

Da nun W. DGH = CHI und W. EGF = DHG ist, so bleibt noch

W. FGH = GHI.

Eben so läßt sich beweisen, daß W. GHI = HIK u. s. w. ist.

Die Figur FGHIK hat also auch gleiche Winkel.

Folglich ist die Figur FGHIK eine reguläre Figur, und zwar von derselben Seitenzahl, als die gegebene ABCDE.

(Van Swinden S. 93).

Anm. 1. Wenn die gegebene Figur ein Quadrat ist, so ist die darin beschriebene Figur wieder ein Quadrat. Davon wird bey einem der Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes Anwendung gemacht.

Anm. 2. Einfacher wird der Beweis für den besonderen Fall, wo die gegebene Figur ein gleichseitiges Dreyeck ist, indem man nämlich den Satz §. 50 voraussetzt.

Anm. 3. Van Swinden fügt noch hinzu, daß auch der Mittelpunkt des zweyten Vielecks der Mittelpunkt des ersten sey. Den Beweis siehe unten nach §. 49.

Zu §. 43.

Art. 16. Lehrs. Die Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreyecks sind einander gleich.

Bew. (Fig. 25). ABC sey ein gleichschenkliges Drtyeck, AB und AC die beyden gleichen Seiten, BC die Grundlinie. Man verlängere die beyden gleichen Seiten AB und AC über B und C hinaus nach D und E, nehme auf BD einen beliebigen Punkt F an, mache AG = AF, und ziehe CF und BG.

Da AF = AG, AC = AB und W. FAC = GAB ist, so ist △ FAC ≌ GAB (§. 39), also auch FC = GB, W. AFC = AGB und W. ACF = ABG.

Nun ist AF — AB = AG — AC oder BF = CG.

In den beyden Dreyecken FBC und GCB ist demnach BF = CG, FC = GB und W. BFC = CGB, also △ BFC ≌ BCG (§. 39); mithin W. BCF = CBG.

Da endlich W. ACF = ABG und W. BCF = CBG, so ist auch

W. ACF — BCF = ABG — CBG

oder

W. ACB = ABC

(Euklid I. Satz 5).

Anm. 1. Dieser Beweis beruht auf dem Satze, daß Dreyecke congruent sind, wenn zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind (Euklid I. Satz 4). Savilius (siehe Hauber a. a. O. S. 195) nennt diese fünfte Euklidische Proposition mit einigen Dornsträuchern verpflanzt; daher erfordere sie die größte Aufmerksamkeit wegen des Beweises, der den Anfängern in der Geometrie ziemlich schwer sey, da er durch das Zusammenkommen so vieler Triangel verwickelt wäre. Deßhalb sey ihr der Beyname der Eselbrücke (Pons asininus) gegeben worden, wie Ang. de Marchettis in seinem Euclides reformatus erzähle; auch erinnere er sich, daß sie irgendwo die Scheuche der Schwachen (Fuga Miserorum) genannt worden sey. — Was mag das für ein Unterricht gewesen seyn, wo ein solcher Beweis den Schülern Schwierigkeiten verursachen konnte?

Anm. 2. Dir Erfindung dieses Satzes wird dem Thales von Milet zugeschrieben (Proclus Barocii p. 143).

Art. 17. Lehrs. Wie Art. 16.

Bew. (Fig. 25). AFG sey ein gleichschenkliges Dreyeck, AF und AG die beyden gleichen Seiten, FG die Grundlinie. Man nehme auf AF einen beliebigen Punkt B an, schneide auf AG die AC = AB ab, ziehe BC, BG und CF.

Da AF = AG, AC = AB und W. FAC = GAB, so ist △ FAC ≌ GAB; also FC = BG und W. AFC = W. AGB.

Da AF = AG und AB = AC ist, so ist auch AF — AB = AG — AC oder BF = CG. Nun ist BF = CG, FC = GB und W. BFC = CGB, also △ BFC ≌ CGB; mithin W. FBC = GCB und W. BCF = CBG.

Also ist auch W. FBC — CBG = GCB — BCF, oder W. FBG = GCF.

Da demnach W. FBG = GCF, FB = GC und BG = CF; so ist △ FBG ≌ CGF, also W. BFG = CGF oder W. AFG = AGF.

(Proclus Barocii p. 140).

Art. 18. Lehrs. Wie Art. 16.

Bew. (Fig. 26). ABC sey ein gleichschenkliges Dreyeck, AB die Grundlinie, AC und BC die beyden gleichen Seiten.

Man zeichne das △ ABC noch einmal hin, nur links und rechts verwechselt. abC sey dieses zweyte Dreyeck; so ist

CA = Cb, weil beyde = CB sind,

ferner

CB = Ca, weil beyde = CA sind,

und

W. C = C

also

△ CAB ≌ Cba

mithin

W. A = b

Nun ist aber auch, da das △ Cab das nämliche wie das △ CAB, nur herum gedreht, oder links und rechts verwechselt, ist,

W. b = B.

Folglich ist

W. A = W. B

(Coetsius p. 52).

Anm. 1. Proclus schreibt diesen einfachen Beweis dem Pappus zu. (Procl. Baroc. p. 141).

Anm. 2. Man kann diesen Satz auch dadurch beweisen, daß man den Winkel ACB an der Spitze halbirt, oder sich halbirt denkt. Dann sind in den beyden durch die Halbirungslinie entstehenden Dreyecken zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich; u. s. w. (Van Swinden S. 37).

Nach §. 43.

Art. 19. Lehrs. Wenn man auf den beyden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreyecks von der Spitze aus gleiche Stücke abschneidet, und die Endpunkte derselben durch eine gerade Linie verbindet; so ist diese der Grundlinie parallel.

Bew. (Fig. 27). Es sey ABC ein gleichschenkliges Dreyeck, BC die Grundlinie desselben. Von den beyden gleichen Seiten AB und AC seyen gleiche Stücke AD und AE abgeschnitten, und es sey DE gezogen; so ist zu beweisen, daß DE ll BC sey.

Da die beyden Dreyecke ABC und ADE den W. A gemein haben, und da die Summe aller Winkel des einen der Summe aller Winkel des andern gleich ist (§. 28), so sind noch die beyden andern Winkel des △ ABC zusammen genommen den beyden andern Winkeln des △ ADE zusammen genommen gleich, oder es ist

W ABC + ACB = ADE + AED

Nun ist (§. 43)

W. ABC = ACB, also W. ABC + ACB = 2. ABC, und

W. AED = AED, also W. ADE + AED = 2. ADE.

Also ist auch

2. ABC = 2. ADE

mithin auch

W. ABC = ADE.

Folglich ist DE ll BC.

(Van Swinden S. 41).

Anm. Es ist leicht zu übersehen, daß man, wenn ADE das gegebene gleichschenkliche Dreyeck wäre, auch AD und AE verlängern, und AB = AC nehmen könnte. Dann ließe sich eben so beweisen, daß BC ll DE wäre.

a. Lehrs. Eine gerade Linie, welche den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreyecks halbirt, halbirt auch die Grundlinie, und steht senkrecht auf derselben.

b. Lehrs. Wenn man in einem gleichschenkligen Dreyeck eine der beyden gleichen Seiten über die Spitze hinaus verlängert, so ist der dadurch entstehende äußere Winkel zweymal so groß als einer der beyden innern gegen über liegenden.

c. Lehrs. Der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks ist jedesmal ein spitzer Winkel.

d. Lehrs. Ein in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks auf dieselbe errichtetes Perpendikel geht durch des Dreyecks Spitze.

Denn aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreyecks gibt es nur Ein Perpendikel auf die Grundlinie. U. s. w.

e. Lehrs. Zwey gleichschenklige Dreyecke, welche gleiche Grundlinien und gleiche Winkel an der Spitze haben, sind congruent.

Zu §. 49.

Art. 20. Lehrs. Ein Dreyeck, in welchem zwey Winkel gleich sind, ist gleichschenklig.

Bew. (Fig. 25). In dem △ ABC sey der W. B = C. Man verlängere AB und AC über B und C hinaus nach D und E, nehme auf BD einen beliebigen Punkt F an, mache CG = BF und ziehe FC und GB.

Da W. ABC = ACB, so sind auch deren Nebenwinkel einander gleich; oder es ist W. FBC = GCB. Ferner ist

BF = CG und BC = CB, also △ FBC ≅ GCB (§. 39), mithin CF = GB und W. BFC = BGC.

In den beyden Dreyecken AFC und AGB ist nun FC = GB, W. AFC = AGB und W. A = A; also ist △ AFC ≅ AGB (§. 40).

Folglich ist (§. 41)

AC = AB,

das △ ABC mithin gleichschenklig.

Anm. Dieser Beweis hat keinen andern Werth, als daß er zu einer Schulübung gebraucht werden kann. Denn, wenn der Satz §. 49 auch direct bewiesen werden soll, so kann man (nach Van Swinden S. 36) aus der Spitze des Dreyecks ein Perpendikel auf die Grundlinie (d. h. auf die Seite, an der die beyden gleichen Winkel anliegen) fällen. Nun sind in den beyden so entstehenden Dreyecken eine Seite und zwey Winkel, also auch der dritte Winkel gleich, beyde Dreyecke sind also congruent, also die in beyden Dreyecken den rechten Winkeln geben über liegenden Seiten einander gleich. — Oder man könnte auch den Winkel an der Spitze (d. h. den dritten Winkel des gegebenen Dreyecks) halbiren, u. s. w.

Art. 21. Lehrs. Wie Art. 20.

Bew. (Fig. 25). In dem △ AFG sey W. AFG = AGF; so ist zu beweisen, daß AF = AG sey. Man schneide von FA ein Stück FB ab, das sowohl kleiner denn *) FA, als auch kleiner denn GA ist. Ferner schneide man von GA ein Stück GC = FB ab, und ziehe BC, FC und BG.

In den beyden Dreyecken BFG und CGF ist W. BFG = CGF (Vorauss.), FB = GC und FG = GF; sie sind also congruent (§. 39). Mithin ist BG = FC, und W. BGF = CFG.

Es ist also auch W. AFG — CFG = AGF — BGF oder W. AFC = AGB.

---

*) Ueber diesen Gebrauch der Conjunction „denn" vgl. Herling Grundregeln des Deutschen Styls §. 190.

In den beyden Dreyecken AFC und AGB ist demnach FC = BG, W. AFC = AGB und W. A = A; also ist △ AFC ≌ AGB (§. 40); daher AC = AB.

Folglich ist auch AB + BF = AC + CG oder AF = AG.

Art. 22. Lehrs. Wie Art. 20.

Bew. (Fig. 26). In dem △ ABC sey der W. A = B. Man denke sich das △ ABC noch einmal daneben stehen nur links und rechts verwechselt, so ist

W. A = W. b, weil beyde = B sind,
W. B = W. a, weil beyde = A sind,

und

AB = ba

also

△ ABC ≌ baC

mithin

AC = bC

Nun ist aber auch, da das △ Cab das nämliche wie das △ CAB, nur herum gedreht, oder links und rechts verwechselt, ist,

bC = BC

Folglich ist

AC = BC

(Coetsius p. 54.)

Nach §. 49.

Art. 23. Lehrs. Wenn in einem Dreyeck die aus der Spitze nach der Grundlinie gezogene gerade Linie den Winkel an der Spitze und die Grundlinie zugleich halbirt, so ist das Dreyeck gleichschenklig.

Bew. (Fig. 22). In dem △ ABD halbire die aus der Spitze D nach der Grundlinie AB gezogene gerade Linie DE sowohl den Winkel ADB an der Spitze, als auch die Grundlinie AB; so ist zu beweisen, daß AD = BD ist.

Man ziehe AC ‖ DE, bis sie die Verlängerung von BD in C trifft, und DF ‖ AB, bis sie der AC in F begegnet;

so ist AD = AD, W. FDA = DAE und W. FAD = EDA (§. 17), also △ ADF ≅ ADE (§. 40); mithin FD = EA.

Da nun EA = EB (Voraussf.), so ist auch FD = EB. Ferner ist W. CDF = DBE und W. FCD = EDB (§. 16), also △ CFD ≅ DEB; mithin CD = DB.

In dem △ CDA ist nun

W. ACD = EDB (§. 16).

und

W. DAC = EDA (§. 17).

Nach der Voraussetzung aber ist

W. EDB = EDA;

also ist auch

W. ACD = DAC.

Das △ CAD ist also gleichschenklig (§. 49); und zwar ist AD = CD.

Nun war aber auch DB = CD.

Folglich ist auch AD = DB. Das △ ABD ist also gleichschenklig.

(Hegenberg S. 50).

Art. 24. Lehrs. Wenn zwey Winkel eines regulären Vielecks durch gerade Linien halbirt sind, so ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt beyder geraden Linien von allen Ecken des Vielecks gleichweit entfernt.

Bew. (Fig. 24). In dem regulären Vieleck ABCDE seyen die beyden Winkel E und D durch die geraden Linien EO und DO halbirt, so ist zu beweisen, daß der Durchschnittspunkt O derselben von allen Ecken des Vielecks gleich weit abstehe.

Da die beyden Winkel E und D einander gleich, und beyde halbirt sind, so sind auch ihre Hälften einander gleich; also W. OED = ODE; daher ist das △ EOD gleichschenklig; mithin EO = OD.

Man ziehe ferner AO; so ist ED = EA (Voraussf.),

W. OEA = OED (Voraussf.) und EO = EO, also △ DEO ≌ AEO (§. 39), mithin AO = OD.

Da nun OD = OE ist, so ist auch AO = OE; mithin auch W. OAE = OEA (§. 43). Nun sind die Winkel E und A des regulären Vielecks einander gleich, und OEA ist die Hälfte des W. E; also ist auch W. OAE die Hälfte des W. A.

Zieht man nun ferner OB, so wird auf dieselbe Art, wie AO = OD war, auch OB = OE.

Alle Ecken des regulären Vielecks ABCDE sind also gleich weit von O entfernt.

Art. 25. Lehrs. Das reguläre Vieleck, das nach dem Lehrsatz des Art. 15 in ein gegebenes reguläres Vieleck construirt wird, hat mit dem gegebenen den Punkt gemein, der die Eigenschaft hat, daß er von allen Ecken des Vielecks gleich weit absteht. (Daß im regulären Vieleck jedesmal ein solcher Punkt Statt finde, ist Art. 24 bewiesen worden).

Bew. (Fig. 24). In dem regulären Vieleck ABCDE sey O der Punkt, der von allen Ecken desselben gleich weit abstehe. Das Vieleck FGHIK sey nach Art. 15 darein beschrieben; so ist zu beweisen, daß der Punkt O von den Ecken dieses Vielecks ebenfalls gleich weit abstehe, oder daß, wenn man OF, OG, OH u. s. w. zieht, alle diese Linien unter einander gleich seyen.

Da FA = EG, AO = EO und W. FAO = GEO (beyde gleich dem halben Polygonwinkel des Vielecks) ist; so ist △ FAO ≌ GEO (§. 39), also OF = OG. Eben so läßt sich beweisen, daß OG = OH ist u. s. w.

(Vgl. oben Art. 15 Anm. 3).

Art. 26. Lehrs. Wenn in einem gleichseitigen Fünfeck drey Winkel, entweder in der Ordnung wie sie auf einander folgen, oder außer solcher Ordnung, einander gleich sind, so hat das Fünfeck lauter gleiche Winkel.

Bew. (Fig. 28). Erster Theil. Wenn in dem gleich-

seitigen Fünfeck ABCDE die drey auf einander folgenden Winkel A, B, C, einander gleich sind.

Man ziehe AC, BE und aus deren Durchschnittspunkt F die FD. In den Dreyecken ABC und ABE ist BC = AB, BA = AE und W. B = A; folglich sind beyde Dreyecke congruent (§. 39). Mithin ist AC = BE, W. BCA = BEA und W. ABE = CAB (§. 41).

Im △ AFB ist also W. ABF = FAB, folglich AF = BF (§. 49). Nun war AC = BE. Daher ist AC — AF = BE — BF oder CF = EF.

In den beyden Dreyecken CFD und EFD ist also CF = EF, CD = ED und FD = FD. Beyde Dreyecke sind also congruent (§. 38). Mithin ist W. FCD = FED. Nun war BCA = BEA. Also ist W. FDC + BCA = FED + BEA, oder W. BCD = AED.

Eben so wird bewiesen, daß W. ABC = CDE ist.

Demnach sind alle fünf Winkel des Fünfecks einander gleich.

Zweyter Theil. Wenn drey Winkel, welche nicht unmittelbar aufeinander folgen, wie A, C, D einander gleich sind.

Man ziehe BD und BE. Es ist AB = CB, AE = CD und W. A = C, also △ ABE ≅ BCD (§. 39), mithin BE = BD, und W. AEB = CDB.

Aus BE = BD folgt, daß der W. BDE = BED ist, folglich W. AEB + BED = CDB + BDE oder W. AED = EDC.

Eben so läßt sich beweisen, daß W. ABC = BCD ist.

Demnach sind wieder alle fünf Winkel des Fünfecks einander gleich.

(Euklid XIII, Satz 7).

Anm. Ein Fünfeck ist durch 7 Data der Gestalt und Größe nach bestimmt, wie das Dreyeck durch 3 und das Viereck durch 5. Wenn ausgesprochen wird, daß alle 5 Seiten eines Fünfecks einander gleich sind, so sind damit 4 Data des Fünfecks gegeben. Es wird nämlich von der 2ten, 3ten, 4ten und 5ten Seite des Fünfecks gesagt, daß sie der ersten gleich sind. Wenn

ferner ausgesprochen wird, daß drey Winkel dieses Fünfecks einander gleich seyen, so sind damit noch 2 Data des Fünfecks gegeben. Es wird nämlich von dem 2ten und 3ten Winkel gesagt, daß sie dem ersten gleich sind. Die Voraussetzungen unseres Lehrsatzes enthalten also 6 Data für das Fünfeck. Daher fehlt noch ein Datum, um das Fünfeck der Gestalt und Größe nach zugleich zu bestimmen. Dieß fehlende Datum ist die Größe von einer Seite des Fünfecks. Da dieses Datum fehlt, so ist, durch die gegebenen 6, das Fünfeck nur der Gestalt nach bestimmt. Es ist bey den Voraussetzungen unseres Lehrsatzes ein reguläres.

Art. 27. Lehrs. Wenn in einem gleichseitigen Sechseck vier Winkel, die unmittelbar auf einander folgen, einander gleich sind, so sind auch die beyden andern Winkel des Sechsecks diesen vieren gleich.

Bew. In dem gleichseitigen Sechseck ABCDEF (Fig. 29) seyen die vier auf einander folgenden Winkel A, B, C, D einander gleich.

Man ziehe EC, BD, welche sich in G durchschneiden; ferner EB und FB.

Es ist $\triangle$ EDC $\cong$ CDB (§. 39), also EC = DB, W. DCE = CDB und W. DEC = CBD.

Aus der Gleichheit der beyden Winkel DCE und CDB folgt die Gleichheit der beyden Seiten DG und CG des Dreyecks DGC (§. 49).

Es ist also auch

$$EC - GC = DB - DG$$

oder

$$EG = BG$$

Aus der Gleichheit von EG und GB folgt ferner die Gleichheit der W. CEB und DBE (§. 43).

Mithin ist

$$\text{W. } CEB + DEC = DBE + CBD$$

oder

$$\text{W. } DEB = CBE.$$

Ferner ist △ FAB ≅ DBC (§. 39), also FB = BD, und W. FBA = DBC.

Da nun FB = BD, FE = ED und EB = EB ist, so ist △ FEB ≅ BED, also W. FEB = DEB, und W. EBF = EBD, mithin

W. EBF + FBA = EBD + DBC

oder

W. EBA = CBE

Da nun W. CBE = DEB, und DEB = FEB war, so sind folglich die vier Winkel EBA, CBE, DEB und FEB unter einander gleich.

Folglich ist

W. DEB + FEB = CBE + EBA

oder

W. DEF = CBA.

Eben so läßt es sich beweisen, daß W. EFA = DCB ist.

Es sind also alle sechs Winkel unseres Sechsecks einander gleich.

Art. 28. Lehrs. Wenn in einem gleichseitigen Sechseck vier Winkel, von welchen drey auf einander folgen, der vierte aber abgesondert ist, unter einander gleich sind, so sind auch die beyden andern Winkel des Sechsecks diesen vieren gleich.

Bew. In dem gleichseitigen Sechseck ABCDEF (Fig. 30) seyen die drey auf einander folgenden Winkel A, B, C und der W. E unter einander gleich.

Man ziehe AC, BD, welche sich in G durchschneiden, ferner AD und FD.

Es ist △ BCD ≅ ABC (§. 39), also BD = AC, W. CBD = ACB und W. CDB = CAB.

Aus der Gleichheit der beyden Winkel CBD und ACB folgt die Gleichheit der beyden Seiten CG und BG des Dreyecks BCG (§. 49).

Es ist also auch

AC — CG = BD — BG

oder

$$AG = GD$$

Aus der Gleichheit von AG und GD folgt ferner im △ ADG die Gleichheit der beyden Winkel ADB und CAD (§. 43).

Mithin ist

$$\text{W. } ADB + CDB = CAD + CAB$$

oder

$$\text{W. } ADC = BAD$$

Ferner ist △ FED ≅ BCD (§. 39), also FD = BD und W. EDF = CDB.

Da nun FD = BD, FA = AB und AD = AD ist, so ist △ DFA ≅ BAD, also W. FAD = BAD und W. FDA = BDA, mithin

$$\text{W. } FDA + EDF = BDA + CDB$$

oder

$$\text{W. } EDA = CDA$$

Es ist also W. EDA = CDA = BAD = FAD, folglich

$$\text{W. } EDA + CDA = BAD + FAD$$

oder

$$\text{W. } EDC = BAF$$

Eben so läßt es sich von dem W. EFA beweisen, daß er dem W. DCB gleich ist.

Anm. Zu den beyden Lehrsätzen (Art. 27 und 28) gilt eine ähnliche Bemerkung wie zu dem Lehrsatz (Art. 26). Ein Sechseck ist durch 9 Data der Gestalt und Größe nach bestimmt. Acht Data bestimmen allein die Gestalt. Die 8 Data sind hier die: daß 5 Seiten der sechsten und 3 Winkel dem vierten gleich sind.

Es versteht sich von selbst, daß unter den Daten keine solche seyen, die sich von selbst aus einander ergeben. So sind z. B. die drey Winkel eines Dreyecks nicht als drey, sondern nur als zwey Data zu betrachten, weil sich der dritte Winkel, wenn zwey gegeben sind, aus diesen zweyen von selbst ergibt.

Daher wäre es auch falsch, wenn ich sagen wollte: die Gestalt eines gleichseitigen Sechsecks wäre bestimmt, wenn vier Winkel von welchen je zwey neben einander liegen, z. B. B, C und E, F einander gleich sind. Denn wir haben (Fig. 30) die Gleichheit der Winkel EDA und ADC, so wie FAD und BAD unter einander bewiesen, ohne auf die Größe des W. A (oder dessen Gleichheit mit B, C und E) Rücksicht zu nehmen. Aus der Gleichseitigkeit des Sechsecks und der Gleichheit der drey Winkel B, C und E unter einander ergibt sich also unmittelbar die Gleichheit des vierten Winkels F mit diesen dreyen, indem, weil in den beyden Vierecken ADEF und ADCB drey Winkel einander gleich sind, nämlich FED = BCD, EDA = CDA und DAF = DAB, auch der vierte Winkel AFE dem vierten Winkel ABC gleich seyn muß. Wirklich kann man sich die Ecken A und D aus einander gezogen oder einander genähert, also die Winkel A und D verkleinert oder vergrößert denken, ohne daß die Winkel B, C, E und F ihre Gleichheit unter einander verlieren.

Wir dürften also nicht etwa den allgemeinen Satz aufstellen: wenn in einem gleichseitigen Sechseck vier Winkel einander gleich sind, so sind auch die beyden andern Winkel des Sechsecks diesen vieren gleich. Eben so: obgleich es des Ueberblicks wegen angenehm ist, sich den allgemeinen Satz zu merken: ein Dreyeck wird durch drey, ein Viereck durch fünf, ein Fünfeck durch sieben u. s. w. Data der Gestalt und Größe nach bestimmt; so wäre es doch ungründlich, wenn man auf diesen Satz Beweise bauen wollte, da es sich erstens nicht immer sogleich übersehen läßt, ob unter den Daten nicht solche sind, die sich aus einander ergeben, und da zweytens in vielen Fällen Mehrdeutigkeit Statt findet, wie z. B. wenn von einem Dreyeck zwey Seiten und der anliegende Winkel gegeben sind.

Art. 29. Lehrs. Wenn in einem gleichwinkligen Fünfeck drey Seiten, entweder in der Ordnung wie sie auf einander folgen, oder außer solcher Ordnung, einander gleich sind; so hat das Fünfeck lauter gleiche Seiten.

Bew. (Fig. 28). Erster Theil. Wenn in dem gleichwinkligen Fünfeck ABCDE die drey auf einander folgenden Seiten BC, BA und AE einander gleich sind.

Man ziehe AC, BE und aus deren Durchschnittspunkt F die FD.

Da das △ BAE gleichschenklig ist, so ist W. ABE = AEB (§. 43). Es ist aber auch (nach der Voraussetzung) W. ABC = AED; also

W. ABC — ABE = AED — AEB

oder

W. CBE = DEB

Es ist aber auch

W. BCD = CDE

daher

W. CBE + BCD = DEB + CDE

Da nun in jedem Viereck BCDE die Summe aller Winkel = 4 R. ist (§. 34); so ist die Hälfte derselben, oder

W. CBE + BCD = 2 R.

Daher ist (§. 19) BE ‖ CD.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß AC ‖ ED ist.

In den beyden Dreyecken FDC und FDE ist also FD = FD, W. CFD = FDE (§. 17) und W. CDF = EFD (§. 17). Also ist △ FDC ≅ FDE; mithin ED = FC.

Da ferner W. BFC + CFE = 2 R. (§. 10) und W. DEB + CFE = 2 R. (§. 18); so ist

W. BFC + CFE = DEB + CFE

also

W. BFC = DEB

Oben wurde aber auch bewiesen, daß

W. CBE = DEB

ist. Folglich ist W. BFC = CBE. Das △ BCF ist also gleichschenklig (§. 49). Mithin ist

BC = FC

Es war aber auch ED = FC.

Folglich ist ED = BC.

Eben so wird bewiesen, daß $CD = AE$ ist.

Zweyter Theil. Wenn drey Seiten, welche nicht unmittelbar auf einander folgen, wie AE, BC und CD einander gleich sind.

Man ziehe AC und BE, welche sich in F durchschneiden, und EC.

Da $AB = AB$, $AE = BC$, und W. $EAB = CBA$ ist, so ist $\triangle EAB \cong CBA$ (§. 39), also $BE = AC$, W. $FBA = FAB$ und W. $AEB = ACB$.

Das $\triangle$ FBA ist also gleichschenklig, nämlich $BF = AF$ (§. 49).

Daher ist $BE - BF = AC - AF$, oder $FE = FC$.

In dem $\triangle$ FEC ist also W. $BEC = ACE$ (§. 43).

Folglich ist

$$\text{W. } AED - AEB - BEC$$
$$= BCD - ACB - ACE.$$

oder

$$\text{W. } DEC = DCE.$$

Mithin ist das $\triangle$ ECD gleichschenklig, und $ED = DC$ (§. 49).

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß $AB = BC$ ist.

Folglich hat das Fünfeck ABCDE lauter gleiche Seiten.

a. Lehrs. Wenn ein aus der Spitze eines Dreyecks auf die Grundlinie gefälltes Perpendikel den Winkel an der Spitze halbirt, so ist das Dreyeck gleichschenklig.

(Hegenberg S. 51).

b. Lehrs. Wenn ein aus der Spitze eines Dreyecks auf die Grundlinie gefälltes Perpendikel die Grundlinie halbirt, so ist das Dreyeck gleichschenklig.

(Hegenberg S. 52).

Anm. „Wenn man sich eine aus der Spitze bis auf die Grundlinie gezogene gerade Linie denkt, und von den folgenden Bedingungen:

1) daß das Dreyeck gleichschenklig ist;

2) daß die gerade Linie den Winkel an der Spitze halbirt;

3) daß die gerade Linie die Grundlinie halbirt, und

4) daß die gerade Linie auf der Grundlinie perpendiculär ist, zwey Statt finden: so finden auch die beyden übrigen Statt." (Hegenberg S. 52).

c. Aufg. Ohne Lineal so viele Punkte zu bestimmen, als man will, die alle in gerader Linie liegen.

Anm. Die Auflösung gründet sich auf den Satz §. 47.

Nach §. 50.

a. Lehrs. Ein Dreyeck, das zwey gleiche Seiten, und einen Winkel = $\frac{2}{3}$ R. hat, ist gleichseitig.

Der Winkel kann entweder von den gegebenen gleichen Seiten eingeschlossen seyn, oder der einen derselben gegen über liegen.

Zu §. 51.

Art. 30. Lehrs. In jedem Dreyeck steht der größeren Seite ein größerer Winkel gegen über.

Bew. (Fig. 31). In dem Dreyeck ABC sey BA > BC, so ist zu beweisen, daß W. BCA > BAC sey.

Man verlängere BC nach D, und schneide auf der so verlängerten Linie von B aus ein Stück BD = BA ab, so fällt D, da BA > BC ist, über C hinaus. Man ziehe DA, so ist

W. BDA = BAD (§. 43)

Nun ist

W. BCA > BDA (§. 30)

also ist auch

W. BCA > BAD

Es ist aber auch

W. BAD > BAC

Um so mehr ist folglich

W. BCA > BAC.

(Proclus Barocii p. 181).

Art. 31. Erklärung. Die gerade Linie ist der kürzeste Weg von einem Punkte zu einem andern.

Zus. Zwey Seiten eines Dreyecks sind also zusammen jedesmal größer als die dritte.

Lehrs. Dem größeren Winkel im Dreyeck steht jedesmal auch eine größere Seite gegen über.

Bew. (Fig. 32). Es sey im △ ABC der W. C > B, so ist zu beweisen, daß AB > AC ist.

Man schneide von dem Winkel C ein Stück BCD = B ab; so ist das △ DCB gleichschenklig, also CD = DB (§. 49).

In dem △ ADC ist nun AD + DC > AC. Folglich ist auch AD + DB oder AB > AC.

(Legendre I. prop. XIV).

Nach §. 51.

Art. 32. Lehrs. In jedem Dreyeck ist die Differenz irgend zweyer Seiten kleiner als die dritte Seite.

Bew. (Fig. 33). Es sey ABC ein beliebiges Dreyeck, BC und AC seyen zwey beliebige Seiten desselben. Wären BC und AC einander gleich, so wäre ihre Differenz = Null, also offenbar kleiner als die dritte Seite AB.

Es sey aber BC > AC, so läßt sich von BC ein Stück CD = AC abschneiden. Man ziehe AD, so ist ACD ein gleichschenkliges Dreyeck, also W. CDA = CAD (§. 43).

Nun ist W. CDA + CAD < 2 R., weil die drey Winkel eines jeden Dreyecks erst zwey rechte Winkel betragen (§. 28). Mithin ist CDA < 1 R. oder CDA ist ein spitzer Winkel.

Der W. ADB, als Nebenwinkel des spitzen W. CDA, ist folglich ein stumpfer Winkel. Der W. ADB ist also der größte Winkel des △ ADB.

Dem größten Winkel eines Dreyecks steht aber jedesmal die größte Seite gegen über (§. 51). Mithin ist AB die größte Seite des Dreyecks ADB; folglich ist AB > BD, d. i.

AB > CB — AC.

(Hahn ebene Geom. p. 60.)

Anm. Unser Lehrsatz folgt auch schon unmittelbar aus dem Satze, daß die Summe zweyer Seiten eines Dreyecks jedesmal größer als die dritte Seite, oder daß AB + AC > BC ist, wenn man AC von beyden ungleichen Größen wegnimmt.

Art. 33. Lehrs. Von zwey geraden Linien, die von einem gegebenen Punkte außerhalb einer geraden Linie gezogen werden, ist diejenige die kleinere, welche von dem Perpendikel aus dem gegebenen Punkte auf die gegebene gerade Linie am wenigsten abweicht.

Bew. (Fig. 34). Es sey MN eine gegebene gerade Linie, A der gegebene Punkt außerhalb derselben, AB das Perpendikel aus A auf MN, und die Linie AC weiche weniger als AD von dem Perpendikel AB ab.

In dem △ ABC ist W. ABC ein rechter, also W. ACB ein spitzer Winkel (§. 32).

In dem △ ACD ist der W. ACD der Nebenwinkel des W. ACB, also ein stumpfer Winkel (§. 8).

Es ist also der Winkel ADC ein spitzer Winkel (§. 32).

Daher ist der W. ACD > ADC. Folglich ist auch AD > AC (§. 51).

Lägen die beyden Linien auf beyden Seiten des Perpendikels AB, wie AD und AE, so kann man BC = BE machen. Dann ist das △ ABC ≌ ABE (§. 39). Es ist also AC = AE, und hat, da auch W. CAB = EAB ist, dieselbe Abweichung von dem Perpendikel wie AE; so daß, was von AC bewiesen wird, auch von AE gilt.

Art. 34. Lehrs. Jede gerade Linie, die innerhalb eines gleichschenkligen Dreyecks aus der Spitze desselben nach einem Punkte der Grundlinie gezogen werden kann, ist kleiner als eine der beyden gleichen Seiten des Dreyecks.

Bew. (Fig. 35). CD sey eine solche Linie, die aus der Spitze C des gleichschenkligen Dreyecks ABC nach irgend einem Punkte D der Grundlinie AB gezogen worden: so ist W. CDB > CAB (§. 30). Es ist aber W. CAB = CBA (§. 43);

also auch W. CDB > CBA. In dem △ CDB steht also CD dem kleineren und CB dem größeren Winkel gegen über. Es ist folglich CD < CB (§. 51).

(vgl. Euklid III. Satz 2).

Anm. Kürzer kann der Beweis mittelst des Satzes Art. 33 geführt werden, indem man sagt, daß jedesmal CD von dem Perpendikel, das aus C auf AB gefällt werden kann, weniger abweicht als die eine oder die andere der beyden gleichen Seiten des Dreyecks.

Art. 35. Lehrs. Jede innerhalb eines Dreyecks gezogene gerade Linie ist kleiner als des Dreyecks größte Seite.

Bew. Die innerhalb des Dreyecks gezogene gerade Linie kann entweder durch eine Ecke des Dreyecks gehen oder nicht.

I. Wenn sie durch eine Ecke des Dreyecks geht.

A) Durch die Ecke, welche der größten Seite des Dreyecks gegen über liegt.

Es sey (Fig. 36) BC die größte Seite des Dreyecks ABC, und AD die aus der gegen über liegenden Ecke innerhalb des Dreyecks gezogene gerade Linie; so muß diese die Seite BC in einem Punkte D durchschneiden.

Die Linie AD ist entweder kleiner oder gleich oder größer als die eine der beyden kleineren Seiten AC. Wenn sie kleiner als AC oder ihr gleich ist; so ist sie umsomehr kleiner als BC. Wenn sie aber größer als AC ist: so ist W. ACD > ADC (§. 51); also, da W. ADB > ACD (§. 30), umsomehr ADB auch > ADC; also ADB ein stumpfer Winkel, folglich der größte Winkel des △ ABD; mithin AB > AD, umsomehr BC > AD. Die AD mag also kleiner, gleich oder größer als eine der beyden kleineren Seiten des △ ABC seyn, so ist sie immer kleiner als die größte Seite BC.

B) Durch eine der Ecken, welche der größten Seite des Dreyecks anliegt.

Es sey (Fig. 37) BC die größte Seite und BE irgend eine aus deren einem Endpunkte B innerhalb des Dreyecks

gezogene gerade Linie; so muß dieselbe die der Ecke B gegen über liegende Seite AC in einem Punkte E durchschneiden.

Da BC die größte Seite, so ist der gegen über liegende Winkel A der größte Winkel des △ ABC (§. 51), also > BCE. Der Winkel BEC ist aber > A (§. 30). Umsomehr ist also BEC > BCE. In dem △ BEC steht daher BC dem größeren und BE dem kleineren Winkel gegen über. Folglich ist BC > BE.

II. Wenn sie nicht durch eine Ecke des Dreyecks geht, so durchschneidet sie entweder

A) die größte und eine der kleineren Seiten des Dreyecks, wie FG (Fig. 38) welche die größte Seite BC in F, und die eine der beyden kleineren, AC, in G durchschneide. Man verbinde die der Seite AC gegen über liegende Ecke B mit dem Durchschnittspunkt G durch die gerade Linie BG; so ist BG < BC, (vermöge Bew. I. B) also im △ BGC die Seite BC die größere Seite des Dreyecks. Darin ist FG eine aus der gegen über liegenden Ecke G gezogene Linie, also FG < BC (vermöge Beweis I. A.).

B) Oder sie durchschneidet die beyden kleineren Seiten des Dreyecks, wie HI (Fig. 39), welche die Seite AB in H und die Seite AC in I trifft. Man verbinde den einen von beyden Durchschnittspunkten I mit der gegen über liegenden Ecke B durch die gerade Linie BI; so ist BI < BC (vermöge Beweis I. B).

Der Winkel A ist größer als der W. ABC (§. 51). W. ABC ist > W. ABI. Um so mehr ist A > ABI.

Ferner ist BHI > A. Um so mehr ist also BHI > ABI.

Folglich ist BI, welche im △ BIH dem Winkel BHI gegen über liegt, größer als HI, die dem ABI gegen über liegt.

Um so mehr ist BC > HI.

Anm. 1. Obiger Lehrsatz ließe sich in zwey, oder auch in vier, Lehrsätze zerspalten, und dann aus den einzelnen Lehrsätzen zusammen genommen die Folgerung ziehen, daß jede

innerhalb eines Dreyecks gezogene gerade Linie kleiner als des Dreyecks größte Seite ist.

Anm. 2. Da im gleichseitigen Dreyeck keine Seite kleiner als die andere ist; so ist jede in dem gleichseitigen Dreyeck gezogene gerade Linie kleiner als eine jede Seite des Dreyecks.

Art. 36. Lehrs. Wenn innerhalb der Schenkel eines stumpfen oder rechten Winkels zwey unter sich gleiche gerade Linien von einem Schenkel zum andern gezogen sind: so durchschneiden sich diese in einem Punkte innerhalb des Winkels.

Bew. (Fig. 40). Es sey BAC ein stumpfer oder rechter Winkel; und es seyen DE und GF zwey unter sich gleiche gerade Linien, deren Endpunkte D und G auf dem Schenkel AB, und deren Endpunkte E und F auf dem Schenkel AC liegen: so ist zu beweisen, daß sich beyde gerade Linien in einem Punkte H innerhalb des Winkels BAC durchschneiden.

Wenn sowohl die Punkte D und G, als auch die Punkte E und F zusammen fielen, so fielen beyde gerade Linien DE und GF ganz zusammen. Von diesem besonderen Falle kann hier nicht die Rede seyn.

Es falle nun auf dem Schenkel AB der Punkt D zwischen A und G. Man ziehe EG.

Da W. BAC, nach der Voraussetzung, entweder ein stumpfer oder ein rechter ist; so ist, da es in einem Dreyeck jedesmal nur einen rechten oder nur einen stumpfen, und nie einen rechten und stumpfen Winkel zugleich geben kann (§. 32), der W. ADE ein spitzer Winkel, sein Nebenwinkel EDB also ein stumpfer Winkel.

Im △ EDG steht EG also einem stumpfen und ED einem spitzen Winkel gegen über, also ist (§. 51)

$$EG > ED$$

Es ist also auch, da GF = ED ist,

$$EG > GF$$

Der Punkt F kann also mit dem Punkt E nicht zusammen fallen.

Der Punkt F kann aber auch nicht über E hinaus, oder zwischen E und C fallen. Denn da W. CAB ein stumpfer

oder ein rechter ist, so ist (§. 32) W. AEG ein spitzer, also sein Nebenwinkel GEC ein stumpfer Winkel. Fiele nun der Punkt F über E hinaus, z. B. in f, so stände im △ GEf die Gf einem stumpfen Winkel GEf gegen über, wäre also > EG, was dem Obigen widerspricht, daß GF > EG ist.

Da nun der Punkt F weder auf E noch über E hinaus fallen kann, so muß er diesseits E oder zwischen A und E fallen.

Die Linie GF, die in G außerhalb des △ ADE ist, muß also durch ED innerhalb des △ ADE kommen, um dessen Seite AE in einem Punkte E zu treffen; d. h. sie muß die Linie ED in einem Punkte H durchschneiden.

Anm. Dieser Lehrsatz gilt nicht für jeden Winkel BAC; sondern wenn der W. BAC spitz ist, so kann FG ganz innerhalb des △ ADE liegen.

a. Mehre Lehrsätze, wenn eine Seite und ein anliegender Winkel im einen Dreyeck einer Seite und anliegendem Winkel im andern Dreyeck gleich, ein drittes Stück im ersten aber größer als das gleichliegende Stück im andern ist. (Hegenberg S. 60—62).

Zu §. 53.

Art. 37. Lehrs. Zwey Seiten eines Dreyecks sind zusammen immer größer als die dritte.

Bew. (Fig. 41). Man verlängere die Seite BA des △ ABC nach D, mache AD = AC, und ziehe DC.

Da ACD ein gleichschenkliges Dreyeck und CD dessen Grundlinie ist, so ist W. ACD = ADC, folglich W. BCD > ADC.

Da nun dem größeren Winkel die größere Seite gegen über steht, so ist DB > BC, folglich auch

$$BA + AC > BC.$$

(Euklid I. Satz 20).

Anm. Proklus erzählt, daß die Epicuräer diesen Lehrsatz sehr anzufechten pflegten, indem sie sagten, daß er dem Esel einleuchte und keines Beweises bedürfe. Daß er dem Esel bekannt sey, zeigen sie daraus, daß derselbe, um zu dem Futter

zu gelangen, das sich an dem Ende der einen Seite befinde, immer nur eine Seite zurücklege, nie aber zwey. Procl. Baroc. p. 184.

Art. 38. Lehrs. Wie Art. 37.

Bew. (Fig. 42). Es soll bewiesen werden, daß die beyden Seiten BA und AC des Dreyecks ABC zusammen größer sind als BC. Man theile den W. BAC durch die gerade Linie AD, welche die Seite BC in D trifft, in zwey gleiche Theile.

In dem △ ADC ist die Seite CD nach B verlängert, also W. ADB > DAC, also auch, da BAD = DAC ist, W. ADB > BAD. In dem △ BAD steht also AB einem größeren und BD einem kleineren Winkel gegen über. Es ist daher AB > BD.

Eben so ist in dem △ ABD die Seite BD nach C verlängert, also W. ADC > DAB (§. 30), also auch > DAC. In dem △ ADC steht also AC einem größeren und DC einem kleineren Winkel gegen über. Es ist daher AC > DC.

Folglich ist AB + AC > BD + DC

oder

AB + AC > BC.

(Proclus Baroc. p. 185; Clavius S. 43).

Anm. Proklus schreibt diesen Beweis den Schülern des Heron und Porphyrius zu.

Art. 39. Lehrs. Wie Art. 37.

Bew. (Fig. 41). In dem △ BDC sey BD diejenige Seite, welche nicht kleiner als eine jede der beyden andern Seiten einzeln genommen ist (also: im gleichseitigen Dreyeck den beyden andern Seiten einzeln genommen gleich; im gleichschenkligen Dreyeck eine der beyden gleichen Seiten, wenn die Grundlinie kleiner als eine von diesen, hingegen die Grundlinie, wenn sie größer als eine der beyden gleichen Seiten ist; im ungleichseitigen Dreyeck endlich die größte Seite). Unter dieser Voraussetzung ist offenbar BD mit einer der beyden andern Seiten zusammen genommeu größer als die dritte. Es

ist also nur noch übrig zu beweisen, daß die beyden andern zusammen größer als BD sind.

Da BC nicht > BD ist, so ist es entweder = BD oder < BD
Im ersten Falle ist offenbar

$$BC + CD > BD.$$

Im zweyten Falle schneide man von BD ein Stück BA = BC ab und ziehe AC; so ist

W. DAC > ACB (§. 30)

Nun ist aber

W. BAC = ACB (§. 43)

also ist auch

W. DAC > BAC

Nun ist aber wieder

W. BAC > ACD (§. 30)

Um so mehr ist mithin

W. DAC > ACD

In dem △ ADC steht also DC einem größeren Winkel gegen über als AD; also ist

$$DC > AD$$

folglich auch, da BC = BA ist,

$$DC + BC > AD + BA$$

oder

$$DC + BC > BD.$$

(Proclus Baroc. p. 185 und 186).

Nach §. 53.

Art. 40. Lehrs. Wenn aus zweyen Ecken eines Dreyecks zwey gerade Linien nach demselben Punkte innerhalb des Dreyecks gezogen werden, so sind sie zusammen kleiner als die beyden, zwischen den zwey Ecken nicht enthaltenen, Seiten des Dreyecks, schließen aber einen größeren Winkel ein, als diese.

Bew. 1. Die zwey Linien BD und CD (Fig. 11) seyen aus den beyden Ecken B und C des Dreyecks ABC nach dem Punkte D innerhalb des Dreyecks gezogen; man verlängere eine von beyden BD nach E: so ist

$$BA + AE > BE \quad (\S.\ 53)$$

also (Ax.)

$$BA + AE + EC > BE + EC$$

oder

$$BA + AC > BE + EC$$

Ferner ist

$$DE + EC > DC \quad (\S.\ 53)$$

also (Ax.)

$$DE + EC + BD > DC + BD$$

oder

$$BE + EC > BD + DC$$

Um so mehr ist folglich

$$BA + AC > BD + DC$$

d. h. die zwey Seiten sind zusammen größer als die zwey Linien innerhalb des Dreyecks.

2. In dem Dreyeck ABE ist die Seite AE nach C verlängert, also der W. BEC $>$ BAC (§. 30). In dem $\triangle$ DEC ist die Seite ED nach B verlängert, also W. BDC $>$ BEC. Um so mehr ist folglich W. BDC $>$ BAC. (Euklid I. Satz 21).

Anm. 1. Der erste Theil des Beweises konnte auch so geführt werden:

$$\left.\begin{array}{l} BA + AE > BD + DE \\ \text{und} \\ DE + EC > DC \end{array}\right\} \S.\ 53.$$

folglich (Ax.)

$$BA + AE + DE + EC > BD + DE + DC$$

also auch, indem man vom Größeren und Kleineren Gleiches wegnimmt,

$$BA + AE + EC > BD + DC$$

oder

$$BA + AC > BD + DC$$

Anm. 2. Obiger Lehrsatz kann auch so ausgedrückt werden: Wenn in zweyen Dreyecken eine Seite in dem einen so groß als in dem andern, die anliegenden Winkel im ersten aber

kleiner als die anliegenden Winkel im andern sind; so ist auch die Summe der beyden andern Seiten im ersten Dreyeck kleiner als die Summe der beyden andern Seiten im zweyten (Hegenberg S. 70).

Art. 41. Lehrs. Wenn innerhalb eines Dreyecks zwey Punkte so genommen werden, daß, wenn man die eine Ecke des Dreyecks mit dem ersten Punkt, den ersten mit dem zweyten, und den zweyten Punkt mit einer andern Ecke des Dreyecks durch gerade Linien verbindet, diese drey gerade Linien mit der Seite des Dreyecks ein Viereck von lauter ausgehenden Winkeln bildet: so sind die drey geraden Linien zusammen kleiner als die beyden andern Seiten des Dreyecks.

Bew. (Fig. 43). In dem $\triangle$ ABC seyen die zwey Punkte D und E so genommen, daß wenn man die geraden Linien AD, DE und EB zieht, das Viereck ADEB lauter ausgehende Winkel habe; so ist zu beweisen, daß $AD + DE + EB < AC + CB$ sey.

Man verlängere zuerst AD, so wird, da AD zwischen AB und AC fällt, die Verlängerung von AD die Seite BC zwischen B und C in einem Punkte F treffen.

Hierauf ziehe man DB, so wird, da die Winkel ADE und DEB ausgehende Winkel des Vierecks ADEB sind, die Linie DE zwischen DF und DB fallen. Man verlängere DE, so wird, da DE zwischen DF und DB fällt, die Verlängerung von DE die BF in einem Punkte G zwischen F und B treffen.

Also ist (§. 53)

$$AC + CF > AD + DF$$
$$DF + FG > DE + EG$$
$$EG + GB > EB$$

daher (Ax.)

$$AC + CF + DF + FG + EG + GB$$
$$> AD + DF + DE + EG + EB$$

Nimmt man auf beyden Seiten DF + EG weg; so bleibt

$$AC + CF + FG + GB > AD + DE + EB$$

Nun ist aber CF + FG + GB = CB. Folglich ist auch

$$AC + CB > AD + DE + EB.$$

Anm. 1. Die Anwendung davon auf drey, vier u. s. w. innerhalb des Dreyecks ACB angenommene Punkte ist leicht.

Anm. 2. Im Allgemeinen gilt der Satz: Wenn zwey gebrochene Linien ACDEB und AFGHB (Fig. 44), sie mögen, eine jede für sich, aus so vielen geraden Linien zusammen gesetzt seyn als sie wollen, von zwey Punkten A und B ausgehen, und beyde gegen die gerade Linie AB hin durchaus concav bleiben, so ist die äußere umgebende ACDEB jedesmal größer als die innere umgebene AFGHB. Noch einige besondere hierher gehörige einfachere Fälle heraus zu suchen, und zu beweisen, bleibt dem Leser überlassen.

Anm. 3. Von diesem Satze wird auch auf krumme Linien Anwendung gemacht. Eine besondere Anwendung ist die, daß das in dem Kreis beschriebene Vieleck jedesmal einen kleineren, und das um den Kreis beschriebene Vieleck jedesmal einen größeren Umfang als der Kreis habe.

Anm. 4. In dem Fall der Fig. 43 läßt sich auch noch beweisen, daß ein jeder der beyden Winkel ADE nnd DEB des Vierecks ADEB, für sich genommen, größer als der W. ACB des Dreyecks ist. Denn nach Art. 40 ist W. ADB > ACB; ADE ist aber > ADB; um so mehr ist also ADE > ACB.

Art. 42. Lehrs. Wenn in der Mitte einer geraden Linie ein Perpendikel errichtet ist, so ist jeder Punkt außerhalb dieses Perpendikels von den beyden Endpunkten der geraden Linie ungleich entfernt; und zwar liegt er demjenigen Endpunkte am nächsten, mit welchem er auf derselben Seite des Perpendikels liegt.

Bew. (Fig. 45). CD sey ein Perpendikel, das in der Mitte zwischen A und B auf AB errichtet ist. E sey ein Punkt außerhalb dieses Perpendikels, der mit dem Endpunkt B auf derselben Seite des Perpendikels liegt. Man ziehe EB und EA, so wird EA das Perpendikel CD in einem Punkte F durchschneiden. Man ziehe noch BF, so ist CA = CB,

CF $=$ CF und W. ACF $=$ BCF, also $\triangle$ ACF $\cong$ BCF, mithin AF $=$ BF.

Nun ist BF $+$ FE $>$ BE (§. 53)
also auch

$$AF + FE > BE$$

oder

$$AE > BE$$

(Legendre I, prop. XVII).

Art. 43. Lehrs. Wenn von zweyen gegebenen Punkten außerhalb einer gegebenen geraden Linie zwey gerade Linien nach einem Punkte derselben gezogen werden, so ist die Summe dieser beyden Linien dann so klein als möglich, wenn sie mit der gegebenen Linie gleiche Winkel machen.

Bew. (Fig 13). MN sey eine gerade Linie, A und B Punkte außerhalb derselben, und W. BEM $=$ AEN. Man verlängere AE, mache ED $=$ EB und ziehe die Linie BD, welche die MN in C durchschneidet; so ist BE $=$ DE (Constr.), CE $=$ CE, und, da W. AEN $=$ BEM (Vorausf.) und auch $=$ MED (als Scheitelwinkel) ist, W. BEM $=$ MED, also $\triangle$ CBE $\cong$ CDE, daher BC $=$ DC, und W. BCE $=$ DCE.

AE $+$ EB ist demnach $=$ AE $+$ ED $=$ AD.

Es sey F irgend ein anderer Punkt auf MN, nach welchem Linien von A und B gezogen seyen; so ist W. AFN $>$ AEN und BFM $<$ BEM (§. 30), also sind, für jeden andern Punkt außer E, die Winkel AFN und BFM einander ungleich. Es ist nun zu beweisen, daß AF $+$ FB jedesmal $>$ AE $+$ EB sey.

Man ziehe DF, so ist, da BC $=$ DC, CF $=$ CF und W. BCF $=$ DCF ist, das $\triangle$ BCF mit dem $\triangle$ DCF congruent, also BF $=$ DF. AF $+$ FB ist demnach $=$ AF $+$ FD. In dem $\triangle$ ADF ist nun

$$AF + FD > AD$$

Folglich ist auch

$$AF + FB > AE + EB.$$

Zu §. 54.

Art. 44. Lehrs. Wenn in zweyen Dreyecken zwey Seiten gleich, der eingeschlossene Winkel aber in dem einen Dreyeck größer als in dem andern, ist, so ist auch die dritte Seite in jenem Dreyeck größer als in diesem.

Bew. (Fig. 46, 47 und 48). Es seyen in den Dreyecken ABC und DEF die Seiten AB = DE und BC = EF, aber W. ABC > DEF, so ist zu beweisen, daß AC > DF sey.

Man mache W. ABG = DEF und BG = EF, so fällt der Punkt G entweder außerhalb des Dreyecks ABC, wie Fig. 46, oder auf die Seite AC selbst, wie Fig. 47, oder innerhalb des Dreyecks ABC, wie Fig. 48.

In jedem der drey Fälle ist △ ABG ≅ DEF, also AG = DF.

1. Wenn der Punkt G außerhalb des △ ABC fällt (Fig. 46).

Man ziehe GC, so ist, da BG = EF = BC ist, W. BGC = BCG (§. 43), also W. BGC > ACG.

Um so mehr ist W. AGC > ACG.

Also im △ AGC steht AC dem größeren und AG dem kleineren Winkel gegen über. Daher ist AC > AG.

2. Wenn der Punkt G auf die Seite AC selbst fällt (Fig. 47).

Dann ist AG nur ein Theil von AC, also wieder AC > AG.

3. Wenn der Punkt G innerhalb des △ ABC fällt (Fig. 48).

Man ziehe GC und verlängere BG nach H und BC nach I.

Da BG = EF = BC ist, so ist das △ BGC gleichschenklig, also W. BGC = BCG. Es sind also auch die Nebenwinkel beyder Winkel einander gleich, oder es ist W. HGC = GCI.

GCI ist > GCA; also ist auch HGC > GCA.

Um so mehr ist also W. AGC > GCA.

In dem △ AGC steht also AC dem größeren und AG

dem kleineren Winkel gegen über. Daher ist wieder AC $>$ AG.

Es ist folglich in allen drey Fällen AC $>$ AG. Mithin auch, da AG $=$ DF ist, AC $>$ DF.

(Clavius S. 45).

Anm. Der dritte Fall könnte auch so bewiesen werden: Da das $\triangle$ BGC gleichschenklig ist, so sind die beyden Winkel BGC und BCG an der Grundlinie einander gleich; also ist ein jeder, da sie zusammen weniger als zwey rechte Winkel betragen, kleiner als ein rechter. Es ist also W. HGC, als Nebenwinkel von BGC, ein stumpfer Winkel. Um so mehr ist AGC ein stumpfer Winkel. Mithin ist AGC der größte Winkel im $\triangle$ AGC, also AC die größte Seite dieses Dreyecks.

Der oben angegebene Beweis des dritten Falles ist aber vorzuziehen, weil er dem Beweise des ersten Falles mehr analog ist.

Art. 45. Lehrs. Wie Art. 44. [Art. 40].

Bew. (Fig. 46, 47 und 48). (Die Voraussetzungen, Construction, die Unterscheidung der drey Fälle, und der Beweis, daß AG $=$ DF ist, wie in Art. 44).

1. Wenn der Punkt G außerhalb des $\triangle$ ABC fällt (Fig. 46).

Die Linie BG durchschneide die Seite AC in H; so ist

$$\left.\begin{array}{l} AG < GH + AH \\ BC < BH + CH \end{array}\right\} \text{§. 53.}$$

und

also

$$AG + BC < GH + AH + BH + CH$$

oder

$$AG + BC < AC + BG$$

also auch, da BG $=$ EF $=$ BC ist,

$$AG < AC.$$

2. Wenn der Punkt G auf die Seite AC selbst fällt (Fig. 47).

Dann ist AG nur ein Theil von AC, also wieder AG $<$ AC.

3. Wenn der Punkt G innerhalb des $\triangle$ ABC fällt (Fig. 48).

Dann ist AG + GB $<$ AC + CB (Art. 40); also, da GB $=$ CB ist, AG $<$ AC.

Folglich ist auch in jedem Falle DF $<$ AC.

Anm. Dieser Beweis ist aus Legendre I. Satz X. Crelle in seiner Uebersetzung dieses Werks, Berlin 1822, macht die richtige Bemerkung (die auch schon R. Simson in seiner Uebersetzung des Euklid S. 649 macht), daß man die Aufzählung der drey Fälle ersparen kann, wenn man den Winkel DEF an die kleinere Seite AB des Dreyecks ABC legt. Dann kann der Punkt G nicht innerhalb des Dreyecks ABC fallen. Denn wenn H der Punkt ist, in welchem der andere Schenkel BG des Winkels ABG die Seite AC durchschneidet, so ist W. BHC $>$ BAC, also, da W. BAC $>$ BCA ist (§. 51), der W. BHC um so mehr $>$ BCA, also BC $>$ BH. Also liegt der Punkt G, da BG $=$ BC ist, auf der Verlängerung von BH über das $\triangle$ ABC hinaus. Wäre AB $=$ BC, so läßt sich eben so leicht beweisen, daß BC $>$ BH ist.

Art. 46. Lehrs. Wie Art. 44. [Art. 33.]

Bew. (Fig. 49, 50 und 51). Es seyen in den Dreyecken ABC und DEF die Seiten AB $=$ DE und BC $=$ EF, aber W. ABC $>$ DEF, so ist zu beweisen, daß AC $>$ DF sey.

Man mache W. ABG $=$ DEF, BG $=$ EF, und ziehe AG, so ist $\triangle$ ABG $\cong$ DEF (§. 39), also AG $=$ DF.

Man ziehe ferner die gerade Linie CG, und fälle darauf oder auf ihre Verlängerung die Perpendikel AI und BH; so ist GBC ein gleichschenkliges Dreyeck, also GH $=$ HC (§. 46)

Da nun AB jedesmal auf die andere Seite von BH abweicht als BC; so muß auch das Perpendikel AI auf der andern Seite von BH liegen, als BC. Sein Durchschnitts-

punkt I muß also entweder zwischen H und G (wie Fig. 51) oder auf den Punkt G, oder auf die Verlängerung von CG über G hinaus (wie Fig. 49 und 50) fallen. In jedem Falle ist also GI < CI. Also weicht AC weiter von dem Perpendikel AI ab, als AG. Es ist folglich (Art. 33) AC > AG. Mithin auch AC > DF.

(Th. Simpson p. 22).

Art. 47. Lehrs. Wie Art. 44.

Bew. (Fig. 52). In den beyden Dreyecken ABC und DEF sey AB = DE, BC = EF, aber W. ABC > DEF, so ist zu beweisen, daß AC > DF sey.

Die beyden Seiten DE und EF sind einander entweder gleich oder ungleich. Man trage in jedem Falle an diejenige von beyden, welche nicht größer als die andere ist, hier an EF, in E den W. GEF = ABC; so muß, da W. DEF < ABC, also auch < GEF ist, der Schenkel ED zwischen EF und EG fallen.

Man mache EG = AB und ziehe GF, so ist, da EG = AB, EF = BC und W. GEF = ABC ist, △ ABC ≅ GEF, also AC = GF.

Da ED = AB, also auch = EG, und zugleich nicht kleiner als EF ist, so muß der Punkt D außerhalb des △ EGF fallen; oder es muß, wenn m der Durchschnittspunkt von ED und GF ist, ED > Em seyn.

Man ziehe noch DF.

Da das △ EGD gleichschenklig ist, so ist (§. 42)

W. EGD = EDG

Nun ist

W. EGD > FGD

also auch

W. EDG > FGD

Ferner ist wieder

W. FDG > EDG

Um so mehr ist folglich

W. FDG > FGD

In dem △ FDG steht also die Seite GF einem größeren Winkel gegen über, als die Seite DF; daher ist GF > DF (§. 51).

Folglich ist auch, da GF = AC ist,

AC > DF.

(Hahn ebene Geom. S. 68. — R. Simson S. 39 und S. 649).

Anm. Einen directen Beweis des umgekehrten Satzes liefern die beyden nachfolgenden Artikel.

Art. 48. Lehrs. Wenn in zweyen Dreyecken zwey Seiten gleich, die dritte Seite im einen Dreyeck aber größer als im andern ist; so ist auch der eingeschlossene Winkel in jenem Dreyeck größer als in diesem.

Bew. (Fig. 53, 54 und 55). In den beyden Dreyecken BAC und DEF sey BA = ED, AC = DF, aber BC > EF, so ist zu beweisen, daß W. BAC > EDF sey.

Die Seiten BA und AC des Dreyecks BAC, so wie die Seiten ED und DF des Dreyecks EDF, sind unter einander entweder gleich oder ungleich.

Wenn sie unter einander ungleich sind, und zwar AC > AB ist, so ist W. ABC > ACB. Sind sie aber gleich, so ist W. ABC = ACB.

Von der Seite BC, die größer als EF ist, schneide man von B aus, wo die kleinere [oder gleiche] Seite AB anliegt, ein Stück BG = EF ab, und ziehe AG; so ist W. AGC > ABC (§. 30), also, da ABC entweder größer oder eben so groß als ACB ist, auch > ACB. In dem △ AGC steht also AC dem größeren und AG dem kleineren Winkel gegen über. Es ist also AC > AG.

Man mache nun BH = ED und GH = FD, so ist △ BHG ≌ EDF, also W. BHG = EDF.

Da HG = DF = AC ist, so ist HG > AG, also im △ AGH der W. GAH > GHA (§. 51).

Im gleichschenkligen △ BAH ist W. BAH = BHA.

Es können hier nun folgende verschiedene Fälle Statt finden.

1. Kann AH innerhalb der beyden Dreyecke BAG und BHG fallen, wie Fig. 53.

Dann ist

$$\text{W. } GAH + BAH > GHA + BHA$$

oder

$$\text{W. } BAG > BHG.$$

2. Kann AH außerhalb der beyden Dreyecke BAG und BHG fallen, und zwar

a) so, daß sie die über B hinaus gehende Verlängerung von BG in einem Punkte m durchschneidet, wie Fig. 54.

Dann ist

$$\text{W. } GAH - BAH > GHA - BHA$$

oder

$$\text{W. } BAG > BHG$$

b) so, daß sie die über G hinaus gehende Verlängerung von BG in einem Punkte m durchschneidet, wie Fig. 55.

Dann ist

$$BAH - GAH < BHA - GHA$$

oder

$$\text{W. } BAG < BHG.$$

3. Kann AH auf den Umfang der beyden Dreyecke BAG und BHG fallen, und zwar

a) so, daß sie durch den Endpunkt B der Linie BG geht, oder daß BA und BH mit AH zusammen fallen (wie man sich mit Hülfe der Figur 54 vorstellen kann).

Dann ist $BAG = GAH$ und $BHG = GHA$, also

$$\text{W. } BAG > BHG$$

b) so, daß sie durch den Endpunkt G der Linie BG geht, oder daß GA und GH mit AH zusammen fallen (wie man sich mit Hülfe der Fig. 55 vorstellen kann).

Dann ist W. $BAG = BAH$ und W. $BHG = BHA$, also

$$\text{W. } BAG = BHG.$$

Ein anderer Fall außer den fünf genannten ist nicht mehr möglich.

In dem ersten, zweyten und vierten (1; 2, a; und 3, a) ist W. BAG > BHG. Da nun G zwischen B und C, also AG zwischen AB und AC fällt, so ist W. BAC > BAG. Um so mehr ist also

W. BAC > BHG.

Im dritten Fall (2, b) ist zwar W. BAG < BHG. Es ist aber W. HBG > BGH (Voraussſ.) und W. BGH > BmH (§. 30), also HBG > BmH; daher (§. 32) BmH ein spitzer, mithin BmA ein stumpfer Winkel. Am liegt also, wenn man das Perpendikel An auf BC fällt, zwischen AB und An. Da aber AC > AB ist, so kann AC nicht zwischen AB und An fallen. Mithin ist W. BAC > HAB, also auch, da W. BHG < BHA, oder < HAB ist, um so mehr

W. BAC > BHG.

Im fünften Fall (3, b) endlich, wo G mit m zusammen fällt, ergibt sich ebenfalls, daß W. BAC > HAB, also um so mehr

W. BAC > BHG

ist.

Demnach ist in allen möglichen Fällen W. BAC > BHG, also auch, da BHG = EDF ist,

W. BAC > EDF.

Anm. Der Beweis, den Clavius p. 46 mittheilt, und der mich zu dem obigen Beweise zunächst veranlaßt hat, ist, wenigstens so, wie er ihn mittheilt, unvollkommen. Er lautet so: Menelaus Alexandrinus, ut ait Proclus (S. Procl. Baroc. p. 207), demonstrat hoc idem theorema ostensive, hac ratione. Positis eisdem triangulis (Fig. 53), ex base majore BC abscindatur recta BG, aequalis basi minori EF. Fiat quoque angulus GBH aequalis angulo DEF, et sit BH aequalis ipsi BA, atque adeo ipsi DE. Ducta autem recta linea AH, ducatur quoque recta per G, ex H, secans AC in I. Quoniam igitur duo latera BA, BH, aequalia sunt, erunt anguli BAH, BHA, aequales. Rursus quia latera BG, BH, aequalia sunt lateribus EF, ED, utrumque

utrique, et angulus GBH aequalis angulo DEF, per constructionem: erit basis HG basi DF, atque adeo ipsi AC aequalis, angulusque GHB angulo EDF. Et quoniam recta HI major est quam HG, quae est ostensa aequalis ipsi AC, erit quoque major HI quam AC. Sed AC major est adhuc quam AI. Multo ergo major erit HI quam AI. Quare angulus IAH major erit angulo IHA. Additis igitur duobus angulis BAH, BHA, qui ostensi sunt aequales, fiet totus angulus BAC toto angulo BHG major. Sed angulus BHG demonstratus fuit aequalis angulo D. Major igitur etiam erit angulus BAC angulo D, quod est propositum. Quod si quando contingat, rectam AH cadere extra triangulum, auferendi erunt anguli aequales BAH, BHA, etc. ut reliquus fiat angulus BAC major reliquo angulo BHG. Quando autem recta AH per punctum B transit, nihil addendum erit, aut demendum, ut perspicuum est.

Unvollkommen ist dieser Beweis, weil er als bewiesen voraussetzt, daß die Verlängerung von HG die Seite AC schneide. Es kann aber die Verlängerung von HG auch in den Punkt A treffen, oder auch, wie Fig. 57 zeigt, die Seite BA schneiden. Für jeden dieser Fälle müßte der Beweis besonders geführt werden, indem der von Clavius für den ersten Fall (Fig. 53 und 54) gegebene Beweis für die beyden andern Fälle nicht mehr paßt.

Der Unterscheidung der drey Fälle könnte man sich, wenn man den Beweis von Clavius beybehielte, hier nicht einmal dadurch überheben, daß man, wie es bey dem von mir gegebenen Beweise geschehen ist, die Construction so macht, daß das Stück BG = EF von demjenigen Punkte B aus abgeschnitten wird, welchem die kleinere, oder wenigstens gleiche Seite BA anliegt. Denn in Fig. 55 geht die Verlängerung von HG durch die Seite BA, obgleich BG an dieser kleineren Seite BA anliegt.

Ich habe diese Anmerkung gern nicht übergangen, um ein Beyspiel zu geben, daß die so oft getadelte Abweichung von der Ausführlichkeit der Alten im Beweisführen nicht allein die

Ursache von unvollkommenen Beweisen oder ungründlich ausgesprochenen geometrischen Sätzen ist. Unachtsamkeit und Mangel an Aufmerksamkeit, Fehler, denen wir ausgesetzt sind, weil wir Menschen sind, tragen vorzüglich die Schuld dieser Unvollkommenheit, und begegnen selbst einem Clavius, der in seiner Vorrede zum Euklid diejenigen seiner Vorgänger misbilligend beurtheilt, qui, relictis antiquorum demonstrationibus certissimis, proprias alias ac novas confinxerunt, quae plerumque non tam firmae sunt, neque rem ipsam simpliciter et absolute conficiunt; praesertim quod modo propositionibus voces quasdam perperam detrahunt, modo alias inepte apponunt, etc.

Art. 49. Lehrs. Wie Art. 48.

Bew. (Fig. 56). In den beyden Dreyecken BAC und EDF sey BA = ED, AC = DF, aber BC > EF, so ist zu beweisen, daß W. BAC > EDF sey.

Die Seiten BA und AC des △ BAC, so wie die Seiten ED und DF des △ EDF sind unter einander entweder gleich oder ungleich.

Man wähle denjenigen Endpunkt B der Seite BC, an welchem die Seite BA liegt, die nicht größer als die andere AC ist, nehme, von B aus, auf BC die BI = EF, so fällt, da EF < BC ist, der Punkt I zwischen B und C.

Man mache ferner BH = DE und IH = FD, so ist △ BIH ≅ EFD, also

W. BHI = EDF

und

HI = DF = AC

Man ziehe noch AH, welche die BC in m durchschneide, und HC.

Da ED entweder = oder < DF, also auch BH entweder = oder < HI ist, so ist W. BIH entweder = oder < IBH (§. 43 oder §. 51). In jedem Falle also ist W. BIH ein spitzer Winkel.

Mithin ist sein Nebenwinkel HIC ein stumpfer Winkel; also (§. 51).

$$HC > HI$$

mithin auch, da HI = AC ist,

$$HC > AC.$$

In dem △ AHC ist also (§. 51)

$$W. HAC > AHC.$$

In dem △ BAH, in welchem BH = BA, ist

$$W. BAH = BHA.$$

Die Linie HA durchschneidet nun entweder die Linie BC selbst, in einem Punkte m (wie Fig. 56), oder sie durchschneidet die über B hinaus gehende Verlängerung (wie man sich mit Hülfe der Fig. 54 leicht vorstellen kann), oder sie geht durch den Punkt B. Durch C oder durch die über C hinausgehende Verlängerung kann die Linie HA nicht gehen, weil, nach unserer Construction, die Winkel ACB und BCH nothwendig spitze Winkel sind.

1) wenn AH durch die Linie BC selbst geht, so ist

$$HAC + BAH > AHC + BHA$$

oder

$$W. BAC > BHC$$

2) wenn AH durch die Verlängerung von BC geht, so ist

$$W. HAC - BAH > AHC - BHA$$

oder

$$W. BAC > BHC.$$

3) Wenn AH durch den Punkt B geht, so sind die Winkel BAH und BHA gleich null; und die W. HAC und AHC sind die nämlichen wie die W. BAC und BHC, also ist wieder

$$W. BAC > BHC.$$

In jedem Falle ist demnach W. BAC > BHC.

Nun ist, da I zwischen B und C, also HI zwischen HB und HC fällt, der W. BHC > BHI.

Um so mehr ist also

$$W. BAC > W. BHI;$$

folglich auch, da W. BHI = EDF ist,

der W. BAC > EDF.

Anm. Zu diesem directen Beweise unseres Lehrsatzes, der weit einfacher als der des vorigen Art. 48 ist, wurde ich durch Coetsius p. 103 veranlaßt. Aber der Beweis, den Coetsius gibt, ist noch viel mangelhafter als der Beweis des Clavius. Coetsius zieht die Hülfslinie CG = AC oder = DF, und sagt dann, daß W. AGC > AHI sey. Die Linie HC zieht er nicht. Er beweist nicht, daß G zwischen A und H fallen muß (vgl. Art. 36 Anm.). Dann sagt er auch gar nicht, warum der Winkel AGC > AHI ist. Endlich unterscheidet er nicht die verschiedenen Lagen, welche AH annehmen kann. — Directe Beweise unseres Lehrsatzes, die nicht mangelhaft wären, scheinen demnach selten oder gar nicht vorzukommen.

Nach §. 54.

Art. 50. Lehrs. Wenn eine Seite und der gegen über liegende Winkel eines Dreyecks einer Seite und dem gegen über liegenden Winkel eines andern Dreyecks gleich sind, so steht in demjenigen Dreyeck dem einen anliegenden Winkel eine größere Seite gegen über, in welchem dieser anliegende Winkel selbst am wenigsten von einem rechten Winkel verschieden ist.

Bew. (Fig. 58). In den beyden Dreyecken ABC und DEF sey AB = DE und W. C = F; dagegen sey der eine an B anliegende W. ABC weniger von einem rechten Winkel verschieden als der eine an DE anliegende Winkel DEF, so ist zu beweisen, daß AC > DF ist.

Man fälle aus A auf CB oder deren Verlängerung das Perpendikel AG, verlängere dieses über G hinaus nach I, mache GI = AG, und ziehe IB. Eben so fälle man aus D auf FE oder deren Verlängerung das Perpendikel DH, verlängere dieses über H hinaus nach K, mache HK = DH und ziehe KE. Endlich nehme man AL = DH, und ziehe LM ∥ GC bis sie die AC (oder deren Verlängerung, wenn es

nothwendig wäre, sie zu verlängern) in einem Punkte M durchschneidet.

Da BG = BG, GI = GA und W. BGI = BGA ist, so ist △ BGI ≌ BGA, also BI = BA und W. IBG = ABG.

Eben so wird bewiesen, daß EK = ED und W. KEH = DEH ist.

Da nun AB, nach der Voraussetzung, = ED ist, so ist auch BI = EK.

Da der W. ABC weniger von einem rechten Winkel verschieden ist, als W. DEF, so ist W. ABG > DEH, also auch 2. W. ABG > 2. W. DEH oder W. ABI > KED.

In den beyden Dreyecken IBA und KED ist nun BI = EK, BA = ED, dagegen W. IBA > KED; folglich ist auch AI > DK (§. 54).

Nun ist AI = 2. AG und DK = 2. DH. Also ist auch

AG > DH;

also auch, da AL = DH ist,

AG > AL.

Da nun LM ǁ GC geht, so muß sie immer auf derselben Seite von GC bleiben, also die AC zwischen A und C in einem Punkte M durchschneiden.

Folglich ist AC > AM.

Da LM ǁ GC ist, so ist auch W. LMA = GCA, also auch, da nach der Voraussetzung W. GCA = HFD ist, der W. LMA = HFD. Ferner ist der W. ALM = AGC = 1 R. und W. DHF = 1 R., also W. ALM = DHF. Ueberdem ist AL = DH, also △ ALM ≌ DHF (§. 40), mithin AM = DF.

Folglich ist auch AC > DF.

(Th. Simpson p. 23).

Anm. Die Figur stellt die vier hier möglichen Fälle zugleich dar, nämlich

1) wenn die beyden Winkel ABC und DEF zugleich spitz,

2) wenn beyde zugleich stumpf sind,

3) wenn ABC spitz und DEF stumpf ist, und

4) wenn ABC stumpf und DEF spitz ist.

Art. 51. Lehrs. Wenn drey Winkel, davon je zwey zusammen größer als der dritte sind, lauter gleiche Schenkel haben, und man die Endpunkte dieser Schenkel durch gerade Linien verbindet; so sind je zwey dieser geraden Linien zusammen größer als die dritte [Art. 40].

Bew. (Fig. 59, 60 und 61). AD, AE, BF, BG, CH, CI seyen gleiche Schenkel der drey Winkel DAE, B und C, von welchen je zwey zusammen größer als der dritte sind; so sind DE, FG und HI die drey geraden Linien, welche die Endpunkte der gleichen Schenkel verbinden, und es ist zu beweisen, daß jede zwey derselben zusammen größer als die dritte sind.

Man nehme von den drey Winkeln den einen DAE beliebig, und trage an den Schenkel AD desselben den W. KAD = dem einen der beyden andern Winkel, etwa = dem Winkel B: so machen die beyden Winkel DAE und B zusammen entweder einen W. KAE, der kleiner als 2 R. ist, wie Fig. 59, oder sie machen zusammen 2 R. aus, so daß AK mit AE in eine gerade Linie fällt, wie Fig. 60; oder sie machen zusammen mehr als 2 R. aus, wie Fig. 61.

In jedem der drey Fälle mache man AK = AD, und ziehe KD; so ist △ KAD ≌ FBG (§. 39), also KD = FG.

1. Wenn die beyden Winkel DAE und B zusammen weniger als 2 R. betragen (Fig. 59). Man ziehe KE.

Da nach der Voraussetzung die beyden W. DAE und B zusammen > C sind, so ist W. KAE > C, also KE > HI (§. 54). Da nun KD + DE nicht kleiner als KE seyn kann (§. 53), so ist auch KD + DE > HI oder FG + DE > HI.

2. Wenn die beyden Winkel DAE und B zusammen zwey Rechte betragen (Fig. 60).

Es ist AK + AE = CH + CI, also AK + AE > HI (§. 53) oder KE > HI. Da nun KD + DE nicht < KE

seyn kann (§. 53), so ist auch KD + DE > HI oder FG + DE > HI.

3. Wenn die beyden Winkel DAE und B zusammen mehr als 2 R. betragen (Fig. 61).

Der Schenkel AK des Winkels KAD, den man dem W. B gleich macht, fällt nun so, daß wenn man KE zieht, der Punkt A innerhalb des △ DEK zu liegen kommt.

Es ist also (Art. 40) DE + DK > AE + AK, also auch > CH + CI, also auch > HI (§. 53). Folglich ist auch FG + DE > HI.

(Clavius p. 495).

Anm. 1. Dieser Satz dient vorzüglich in der Stereometrie als Lehrsatz. Er wird bey der Auflösung der Aufgabe, aus drey ebenen Winkeln, die zusammen kleiner als vier rechte, und deren jede zwey zusammen größer als der dritte sind, einen körperlichen Winkel zu machen, voraus gesetzt. Daher steht er auch bey Euklid im XIten Buche, in welchem er der 22te Satz ist.

Anm. 2. Statt im ersten Falle des Beweises zu sagen, daß KD + DE nicht < KE seyn könne, hätte man auch mit Hülfe des Art. 34 behaupten dürfen, daß KD + DE jedesmal > als KE sey. Denn KAE ist ein gleichschenkliges Dreyeck, dessen Grundlinie KE ist. m sey nun der Punkt, in welchem die gerade Linie AD oder deren Verlängerung die KE durchschneidet, so ist, nach Art. 34, Am < AE; also auch Am < AD. Der Punkt D kann also nie auf KE selbst fallen. Es bilden daher KD, DE und KE zusammen immer ein Dreyeck, ui welchem KD + DE > KE ist (§. 53).

Art. 52. Lehrs. Wie Art. 51.

Bew. (Fig. 62). Wenn die drey Winkel DAE, B und C einander gleich sind, und man die Schenkel AD, AE, BF, BG, CH, CI einander gleich macht, so sind auch die Linien DE, FG, HI einander gleich, folglich je zwey derselben zusammen größer als die dritte.

Wenn aber nur zwey Winkel einander gleich sind, und der dritte kleiner, so werden auch von den drey Linien, welche den drey Winkeln gegen über liegen, die zwey, welche den beyden gleichen Winkeln gegen über liegen, einander gleich, und die dritte, welche dem kleineren Winkel gegen über liegt, kleiner als diese seyn (§. 54). Es werden folglich wieder zwey dieser drey Linien zusammen größer als die dritte seyn.

Wenn endlich einer von den drey Winkeln, etwa DAE, größer als ein jeder der beyden übrigen ist, sey es nun, daß die beyden übrigen Winkel unter einander gleich oder ungleich sind; so läßt sich von dem W. DAE ein Stück DAK, das dem einen der beyden übrigen Winkel, etwa dem B, gleich ist, abschneiden, und der Rest KAE wird, da nach der Voraussetzung jede zwey der drey gegebenen Winkel zusammen größer als der dritte sind, kleiner als der andere Winkel C seyn.

Man mache AK = AD und ziehe DK und KE.

Da das △ DAK ≌ FBG ist (§. 39), so ist DK = FG.

Da AK = AE = CH = CI aber W. KAE < C ist; so ist auch KE < HI.

Daher ist DK + KE < FG + HI.

Nun ist aber DE nie größer als DK + KE; folglich ist auch DE < FG + HI.

(Clavius p. 496).

Anm. Es gilt hier dieselbe Bemerkung wie in Anm. 2 zu Art. 51, daß sich mit Hülfe des Art. 34 geradezu behaupten läßt, daß DE < DK + KE sey, weil K nicht auf DE fallen kann.

Art. 53. Lehrs. Wenn die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks in drey gleiche Theile getheilt, und aus der Spitze gerade Linien nach den Theilungspunkten gezogen sind; so ist unter den drey Winkeln, die an der Spitze entstehen, der mittelste der größte.

Bew. (Fig. 63). In dem gleichschenkligen △ AEB sey die Grundlinie AB in die drey gleichen Theile AC, CD und DB getheilt, und es seyen nach den Theilungspunkten C und

D die geraden Linien EC und ED gezogen; so ist zu beweisen, daß der W. CED größer als ein jeder der beyden Winkel AEC und BED ist.

Da AE = BE, AC, BD (nach der Voraussf.) und W. EAC = EBD (§. 43) ist; so ist △ ACE ≌ BDE, also W. AEC = BED.

Ferner ist W. ACE > ABE (§. 30), also auch, da EAC = ABE (§. 43) ist, W. ACE > EAC.

Daher ist in dem △ AEC die Seite AE > EC (§. 51).

Man schneide von EA ein Stück EF = EC ab, und ziehe CF; so ist W. EFC = ECF (§. 43), also, da EFC + ECF < 2 R. (§. 28), der W. EFC < 1 R., oder ein spitzer Winkel. Daher ist sein Nebenwinkel AFC > 1 R. (§. 10) oder ein stumpfer Winkel.

Der W. AFC ist also (§. 32) der größte Winkel des △ AFC, mithin > W. FAC.

Nun steht in dem △ AFC die Seite AC einem größeren Winkel gegen über als die Seite FC: daher ist AC > FC (§. 51).

Daher ist auch, da AC = CD ist, CD > FC.

In den beyden Dreyecken FEC und DEC ist nun EF = ED, EC = EC, aber FC < CD; also ist auch (§. 54) W. FEC < CED, oder AEC < CED.

Folglich ist auch, da BED = AEC ist, der W. BED < CED.

Der W. CED ist folglich unter den drey Winkeln an der Spitze der größte.

Anm. Dieser Satz ist für Anfänger in so fern interessant, als er ihnen darthut, daß sie, um einen gegebenen Winkel AEB in drey gleiche Theile zu theilen, nicht zum Zweck gelangen, wenn sie EA = EB machen, und die gerade Linie AB in drey gleiche Theile theilen.

Lehrsätze über Halbirung des Winkels oder der gegen über liegenden Seite im ungleichseitigen Dreyeck. Art. 54 bis 63.

Wird nämlich

1) ein Winkel eines Dreyecks durch eine gerade Linie, die nach der gegen über liegenden Seite geht, halbirt; so erhält man folgende beyden Lehrsätze:

a) Wenn die beyden dem Winkel anliegenden Seiten ungleich sind, so sind auch die Abschnitte der dritten Seite ungleich;

b) Wenn die beyden Abschnitte der dem Winkel gegen über liegenden Seite ungleich sind, so sind auch die dem Winkel anliegenden Seiten ungleich.

Wird hingegen

2) eine Seite eines Dreyecks durch eine gerade Linie aus dem Scheitelpunkt des gegen über liegenden Winkels halbirt; so erhält man ebenfalls zwey Lehrsätze:

a) Wenn die beyden andern Seiten ungleich sind, so sind auch die beyden Theile des Winkels ungleich;

b) Wenn die beyden Theile des Winkels ungleich sind, so sind auch die beyden anliegenden Seiten ungleich.

Zu 1. a. gehört Art. 54 bis 57; zu 1. b. gehören Art. 58 und 60; zu 2. a. Art. 61 und 62; und zu 2. b. gehört Art. 63. — Der Lehrsatz 1. b. dient zur Erfindung eines directen Beweises des Satzes, daß dem größeren Winkel im Dreyeck jedesmal auch eine größere Seite gegen über steht; derselbe ist in Art. 59 mitgetheilt.

Art. 54. Lehrs. Wenn eine Seite eines Dreyecks durch eine gerade Linie, welche den gegen über liegenden Winkel halbirt, in zwey Theile getheilt wird; so sind diese beyden Theile nur dann einander gleich, wenn die beyden anliegenden Seiten einander gleich sind. Sonst ist derjenige Theil, welcher der kleineren Seite anliegt, kleiner als der andere Theil der getheilten Seite.

Bew. Es sey (Fig. 64) die Seite AB des Dreyecks ABC durch die gerade Linie CD, welche den Winkel ACB halbirt, in die beyden Theile AD und DB getheilt.

1) Wäre AC = BC, so wäre, da auch CD = CD und W. ACD = BCD ist, das △ ACD ≌ BCD, daher AD = DB.

2) Es sey aber AC > BC, so läßt sich auf AC die CE = CB abschneiden. Man ziehe DE; so ist, da auch CD = CD und W. ECD = BCD ist, das △ ECD ≌ BCD, also W. y = z, und ED = DB.

Nun ist W. x > y (§. 30); also ist auch x > z.

Ferner ist z > A (§. 30).

Um so mehr ist also x > A.

Im △ AED steht dem W. x die Seite AD und dem W. A die Seite ED gegen über. Es ist daher AD > ED (§. 51).

Folglich auch AD > DB.

Art. 55. Lehrs. Wie Art. 54.

Bew. Es sey (Fig. 66) die Seite BC des Dreyecks ABC durch die gerade Linie AD, welche den W. A halbirt, in die beyden Theile BD und DC getheilt.

1) Wäre AC = AB, so wäre, da auch AD = AD und und W. BAD = DAC ist, das △ BAD ≌ DAC, also BD = DC.

2) Es sey aber AC > AB, so ist im △ ABC der W. B > C (§. 51).

In den beyden Dreyecken BAD und DAC ist nun W. BAD = DAC, und W. B > C; also ist der dritte Winkel ADB < ADC, weil die drey Winkel eines jeden Dreyecks zusammen genommen = 2 R., also die drey Winkel des einen Dreyecks zusammen genommen den drey Winkeln des andern zusammen genommen gleich sind.

Da nun von den beyden Nebenwinkeln ADB und ADC der letzte der größere ist, so ist er ein stumpfer Winkel.

Man errichte in D das Perpendikel DG, so muß, da der rechte Winkel ADG $<$ der stumpfe ADC ist, dieses Perpendikel die Seite AC in irgend einem Punkte G zwischen A und C durchschneiden.

Man verlängere AD nach E und mache DE $=$ DA; so liegen die beyden Punkte E und G (indem GC mit DE von A weg divergirt) auf beyden Seiten von DC so, daß, wenn man die gerade Linie GE zieht, diese die Linie DC in einem Punkte F durchschneiden muß.

Es ist daher DC $>$ DF.

Da AD $=$ DE, DG $=$ DG und W. ADG $=$ EDG ist, so ist $\triangle$ ADG $\cong$ EDG; also W. GAD $=$ GED.

Es ist aber W. GAD $=$ BAD; folglich ist auch W. GED $=$ BAD.

In den beyden Dreyecken FDE und ADB ist nun DE $=$ AD, W. FDE $=$ BDA und W. FED $=$ BAD; also ist $\triangle$ DFE $\cong$ DBA; mithin DF $=$ BD.

Folglich ist DC $>$ BD.

Art. 56. Lehrs. Wie Art. 54.

Bew. (Fig. 65). Es sey die Seite AB des $\triangle$ ABC durch die gerade Linie CD, welche den W. ACB halbirt, in die beyden Theile AD und DB getheilt.

1) Wäre AC $=$ BC, so wäre, da auch CD $=$ CD und W. ACD $=$ BCD ist, das $\triangle$ ACD $\cong$ BCD, daher AD $=$ DB.

2) Es sey aber AC $>$ BC. Man verlängere CB über B hinaus, und nehme von C aus die CE $=$ CA, und ziehe DE; so ist, da auch CD $=$ CD, und W. ECD $=$ ACD ist, das $\triangle$ ECD $\cong$ ACD, also W. E $=$ A, und ED $=$ AD.

Nun ist W. x $>$ y (§. 30), und W. y $>$ A (§. 30), um so mehr ist also W. x $>$ A; also auch, da E $=$ A ist, W. x $>$ E.

Im $\triangle$ DBE steht nun DE einem größeren W. gegen über, als die Seite BD; also ist DE $>$ BD (§. 51).

Folglich ist auch, da AD = DE ist,

AD > BD.

(Hauber p. 352).

Art. 57. Lehrs. Wie Art. 54.

Bew. (Fig. 64). Voraussetzung wie Art. 54.

1) Wie Art. 54.

2) Es sey aber AC > BC. Man schneide auf der längeren Seite AC ein Stück CE = der kürzeren Seite CB ab, und ziehe ED; so ist, da auch CD = CD und W. ECD = BCD ist, das △ ECD ≅ BCD, also ED = DB und W. CED = CBD.

Es ist nnn

W. AED + DEC = 2 R. (§. 10)

und, da die drey Winkel des △ CAB zusammen erst 2 R. betragen (§. 28) !

W. A + CBD < 2 R.

daher

W. AED + CED > A + CBD

Da nun CED = CBD ist, so ist (Ax.)

W. AED > A

In dem △ AED steht nun AD dem größeren W. AED und ED dem kleineren W. A gegen über; also ist AD > ED.

Folglich ist auch, da ED = DB ist,

AD > DB.

Art. 58. Lehrs. Wenn ein Winkel eines Dreyecks in zwey gleiche Theile getheilt ist, und die Theilungslinie die dem Winkel gegen über liegende Seite in zwey ungleiche Theile schneidet: so sind die anliegenden Seiten ebenfalls ungleich; und zwar liegt die größere Seite dem größeren Abschnitt, und die kleinere Seite dem kleineren Abschnitt an.

Bew. (Fig. 66). Die Linie AD halbire den Winkel BAC des Dreyecks ABC, es sey aber der Abschnitt DC der gegen über liegenden Seite BC größer als der Abschnitt BD; so ist zu beweisen, daß AC > AB sey.

Man verlängere AD, und mache DE = DA. Da ferner DC > BD ist, so läßt sich von DC ein Stück DF = DB abschneiden. Man ziehe EF und verlängere sie über F hinaus, so wird die Verlängerung in das Dreyeck ABC gehen, und die Seite AC in einem Punkte G durchschneiden.

Da nun DE = DA, DF = DB (beydes nach der Construction), und W. FDE = ADB, als Scheitelwinkel, ist; so ist △ EDF ≅ ADB, also EF = AB, und W. FED = DAB.

Da auch W. CAD = DAB ist (nach der Voraussetzung); so ist mithin W. FED = CAD.

In dem △ GAE sind also die Winkel, die an der Seite AE liegen, einander gleich. Das △ GAE ist daher gleichschenklig (§. 49). Folglich ist EG = GA.

Nun ist aber CA > GA; folglich ist auch CA > EG.

EG aber ist > EF; um so mehr ist also CA > EF.

Es ist folglich auch, da EF = AB ist, die Seite CA > AB.

Art. 59. Lehrs. Dem größeren Winkel im Dreyeck steht jedesmal auch eine größere Seite gegen über [Art. 58].

Bew. (Fig. 67). Im △ ABC sey der Winkel ABC größer als der Winkel ACB; so ist zu beweisen, daß AC > AB sey.

Man halbire die dritte Seite BC in D, ziehe AD, verlängere AD nach E, mache DE = AD und ziehe BE; so ist △BDE ≅ ADC (§. 39), also BE = AC und W. DBE = ACD.

Da nun W. ABC > ACB, also auch > DBE ist, so theilt die Linie BD den W. ABE in zwey ungleiche Theile.

Man ziehe die Linie BF, welche den W. ABE in die zwey gleichen Theile EBF und FBA theilt; so wird, da W. ABD größer als die Hälfte von ABE, also auch größer als FBA ist, die Linie AD von der Linie BF, zwischen A und D, in einem Punkte F getroffen werden.

Es ist also AF < AD, also auch, da ED = AD ist, AF < ED. Um so mehr ist AF < EF.

Da nun die Linie BF, welche den W. ABE halbirt, die gegen über liegende Seite AE in zwey ungleiche Abschnitte AF und EF theilt, so sind auch die anliegenden Seiten AB und BE einander ungleich, und zwar ist AB < BE (Art. 58).

Folglich ist auch, da BE = AC ist, AB < BE.

Anm. 1. Die Sätze der beyden letzten Artikel sind aus Clavius S. 42. Clavius hat sie aus Proklus (vgl. Procl. Barocii p. 183). [Der letzte ist interessant, weil er einen directen Beweis für den Satz liefert, daß dem größeren Winkel im Dreyeck jedesmal eine größere Seite gegen über steht; der erste dient diesem als Hülfssatz. Er konnte schon nach §. 49 bewiesen werden.

Gewöhnlicher ist es, den Satz, daß der größeren Seite im Dreyeck ein größerer Winkel gegen über stehe, direct zu beweisen, und daraus den andern Satz durch eine sehr leichte Umkehrung (die fast keines Beweises weiter bedarf) abzuleiten. Der directe Beweis, den Legendre (I, prop. XIV) gibt, setzt die Erklärung der geraden Linie, als kürzesten Weg zwischen zweyen Punkten, voraus. S. oben Art. 31.

Anm. 2. Clavius kehrt den Satz (Art. 58) auf folgende Art um: Wenn zwey Seiten eines Dreyecks ungleich sind, so wird die gerade Linie, welche den eingeschlossenen Winkel in zwey gleiche Theile theilt, die gegen über liegende Seite in zwey ungleiche Abschnitte theilen, und zwar wird der größeren Seite ein größerer Abschnitt anliegen. — Es sey (Fig. 42) AC > AB, und der Winkel A in zwey gleiche Theile getheilt. Wäre nun DC = BD, und man nähme auf der Verlängerung von AD die Linie DE = AD, so wäre △ DEC ≌ ADB, also EC = AB und Winkel CED = BAD = DAC; also wäre auch CE = AC, mithin auch AB = AC, gegen die Voraussetzung. Es können also die Abschnitte DC und BD einander nicht gleich seyn. Wäre aber DC < DB, so wäre (nach Art. 58) AB > AC, wieder gegen die Voraussetzung. Es kann also DC weder = noch < DB seyn. Folglich ist DC > DB.

Einen directen Beweis dieses durch Umkehrung bewiesenen Satzes siehe oben Art. 54 bis 57.

Art. 60. Lehrs. Wie Art. 58.

Bew. (Fig. 68). Die Linie AD halbire den W. BAC des Dreyecks ABC, es sey aber der Abschnitt DC der gegen über liegenden Seite BC größer als der Abschnitt BD; so ist zu beweisen, daß AC $>$ AB sey.

Man halbire BC in E, ziehe AE, verlängere es über E hinaus, mache auf dieser Verlängerung die EF $=$ AE und ziehe BF; so ist, da EB $=$ EC, EF $=$ EA und W. BEF $=$ CEA ist, das $\triangle$ BEF $\cong$ CEA, also BF $=$ CA und W. EFB $=$ EAC.

Da BD $<$ DC, also auch kleiner als die Hälfte von BD $+$ DC oder von BC, oder kleiner als BE ist, so muß AD zwischen AB und AE fallen; also ist W. EAB $>$ DAB und EAC $<$ DAC. Daher ist, da DAB und DAC einander gleich sind, EAB $>$ EAC. Nun ist EFB $=$ EAC. Folglich ist auch EAB $>$ EFB.

In dem $\triangle$ FAB steht mithin die Seite FB einem größeren Winkel gegen über, als die Seite AB; es ist folglich FB $>$ AB (§. 51); folglich auch AC $>$ AB.

Art. 61. Lehrs. Wenn ein Winkel eines Dreyecks durch eine gerade Linie, die nach der Mitte der gegen über liegenden Seite gezogen ist, in zwey Theile getheilt wird; so sind diese beyden Theile nur dann einander gleich, wenn die beyden anliegenden Seiten einander gleich sind. Sonst ist derjenige Theil des Winkels, welcher der kleineren Seite anliegt, größer als der andere Theil.

Bew. Es sey (Fig. 69) der Winkel ACB des Dreyecks ABC durch die gerade Linie CD, welche aus C nach der Mitte D der gegen über liegenden Seite AB gezogen ist, in die beyden Theile BCD und ACD getheilt.

1) Wäre AC $=$ BC, so wäre, da auch AD $=$ BD und DC $=$ DC ist, das $\triangle$ ADC $\cong$ BDC, folglich W. ACD $=$ BCD.

2) Es sey aber $AC > BC$; so ist, da $AD = DB$ und $DC = DC$, aber $AC > BC$ ist, der W. $ADC < BDC$ (§. 54).

Da nun $ADC + BDC = 2$ R. ist, so ist ADC ein stumpfer und BDC ein spitzer Winkel (§. 8).

Man verlängere CD nach M, so ist ADM ein spitzer Winkel.

Fällt man nun aus B und A die Perpendikel BF und AE auf CD, so liegt BF innerhalb des Dreyecks DBC und AE außerhalb des Dreyecks ADC. Daher ist $CF < CD$ und $CE > CD$, mithin $CE > CF$. Ferner ist $AD = DB$, W. $ADE = BDF$, und W. $AED = BFD$, also $\triangle\ ADE \cong BDF$; daher $AE = BF$.

Man nehme $EG = FC$, so ist $AE = BF$, $EG = FC$ und W. $AEG = BFC$, also $\triangle\ AEG \cong BFC$, daher der W. $AGE = FCB$.

Da FC, also auch EG kleiner EC ist, so fällt G zwischen E und C.

In dem $\triangle$ ACG ist nun die Seite CG nach E verlängert; also ist W. $AGE > ACE$ (§. 30).

Folglich ist auch W. $FCB > ACE$.

Art. 62. Lehrs. Wie Art. 61.

Bew. (Fig. 70). In dem $\triangle$ ABC sey AB in D halbirt und CD gezogen.

1) Wäre $AC = CB$, so wäre ACB ein gleichschenkliges Dreyeck, und daher der W. ACB durch CD halbirt (§. 45).

2) Es sey aber $BC > AC$. Man verlängere CD, mache $DE = CD$ und ziehe EB; so ist $\triangle\ BDE \cong CDA$, also $BE = CA$ und W. $BED = ACD$.

In dem $\triangle$ CBE ist nun $CB > BE$, weil $BE = CA$, und nach der Voraussetzung $BC > CA$ ist.

Es ist also auch W. $BEC > BCE$ (§. 51).

Folglich ist, da W. $BEC = ACD$, der Winkel $ACD > BCE$.

(Hauber p. 356).

Art. 63. Lehrs. Wenn ein Winkel eines Dreyecks durch eine gerade Linie, die nach der Mitte der gegen über liegenden Seite gezogen ist, in zwey ungleiche Theile getheilt ist; so sind die beyden diesen Theilen anliegenden Seiten des Dreyecks ebenfalls ungleich, und zwar liegt dem kleineren Theile eine größere Seite an.

Bew. (Fig. 70). In dem △ ACB sey der Winkel C durch die gerade Linie CD, die nach der Mitte D der gegen über liegenden Seite AB gezogen ist, so in zwey Theile getheilt, daß der Theil ACD > der Theil BCD ist.

Man verlängere CD über D hinaus, nehme DE = CD und ziehe EB, so ist △ EDB ≌ CDA (§. 39), also W. DEB = DCA und EB = AC.

Da W. ACD > BCD und DEB = ACD ist, so ist auch DEB > BCD.

In dem △ BEC steht also BC einem größeren Winkel gegen über, als BE, folglich ist BC > BE (§. 51).

Folglich ist auch, da BE = AC ist, BC > AC.

(Hauber p. 356).

---

a. Lehrs. Wenn in zweyen Dreyecken eine größere Seite des einen einer größeren Seite des andern, und eine kleinere Seite des ersten einer kleineren Seite des zweyten gleich, der eingeschlossene Winkel im ersten Dreyeck aber größer als im zweyten ist; so ist der Winkel, der im ersten Dreyeck der erwähnten größeren Seite gegen über liegt, kleiner als der Winkel, der im zweyten Dreyeck der erwähnten größeren Seite gegen über liegt.

Denn, ist in Fig. 46 die größere Seite BC der größeren EF und die kleinere AB der kleineren DE gleich, der Winkel ABC aber > DEF, und legt man (vgl. Anm. S. 200) den Winkel ABG = DEF an die kleinere Seite AB, und macht das △ ABG ≌ DEF: so fällt der Punkt G außerhalb des △ ABC. Also ist W. GAB > CAB. U. s. w.

(Hegenberg S. 58).

Anm. 1. Ist der Winkel, der im ersten Dreyeck der kleineren Seite gegen über liegt, auch kleiner als der Winkel, der im zweyten Dreyeck der kleineren Seite gegen über liegt? — Daß diese Frage nicht immer (also, so wie sie gestellt ist, gar nicht) bejaht werden könne, zeigt Fig. 48.

Anm. 2. Obiger Lehrsatz läßt sich, was die Winkel betrifft, auch umkehren. S. Hegenberg S. 59.

Nach §. 60.

Lehrsätze über die Eigenschaften der Parallelogramme. Art. 64 bis 69.

Diese lassen sich wieder in zwey Hauptabtheilungen bringen:

a) solche, bey denen ein Parallelogramm vorausgesetzt wird. Art. 64 bis 67.

b) solche, bey denen aus den vorausgesetzten Eigenschaften eines Vierecks geschlossen wird, daß das Viereck ein Parallelogramm sey. Art. 68 und 69.

Art. 64. Lehrs. Jede gerade Linie, welche durch die Mitte der Diagonale eines Parallelogrammes geht, theilt das Parallelogramm in zwey gleiche Theile.

Bew. (Fig. 71). Es sey durch die Mitte G der Diagonale AC des Parallelogrammes ABCD eine beliebige Linie FE gezogen; so ist AG = GC, W. AGE = CGF und W. GAE = GCF, also △ AGE = GCF.

Es ist ferner △ ABC = ADC, also

$$\triangle\ ABC - AGE = ADC - GCF$$

oder

$$EBCG = FDAG$$

Mithin

$$EBCG + GCF = FDAG + AGE$$

oder

$$EBCF = FDAE.$$

(Clavius p. 60).

Art. 65. Hülfsſ. Wenn in zweyen Vierecken drey Seiten und zwey von denſelben eingeſchloſſene Winkel im einen gleich denen im andern ſind, ſo ſind die beyden Vierecke congruent.

Bew. (Fig. 72). In den beyden Vierecken ABCD und abcd ſey AB = ab, BC = bc, CD = cd, W. B = b und W. C = c.

Man theile beyde durch die gleichliegenden Diagonalen AC und ac in Dreyecke; ſo iſt

△ ABC ≌ abc (§. 39)

alſo auch AC = ac und W. BCA = bca; daher auch C — BCA = c — bca oder W. ACD = acd.

In den beyden Dreyecken ACD und acd iſt nun wieder AC = ac, CD = cd nnd W. ACD = acd; alſo auch

△ ACD ≌ acd (Art. 39).

Da nun die Dreyecke ABC und ACD den Dreyecken abc und acd congruent ſind, und jene beyden auf dieſelbe Art neben einander liegen, wie dieſe, ſo ſind folglich auch die beyden Vierecke ABCD und abcd congruent.

Art. 66. Lehrſ. Wie Art 64. [Art. 65.]

Bew. (Fig. 71). Es ſey durch die Mitte G der Diagonale AC des Parallelogrammes ABCD eine beliebige Linie FE gezogen; ſo iſt AG = GC, W. AGE = CGF und W. GAE = GCF, alſo △ AGE ≌ CFG; daher AE = FC.

Ferner iſt AD = CB (§. 56).

Ferner DC — FC = AB — AE, oder DF = BE.

Endlich iſt W. EAD = FCB und W. D = B (§. 57.)

Folglich Viereck EADF ≌ FCBE (Art. 65).

Art. 67. Lehrſ. Die Diagonalen eines jeden Parallelogrammes durchſchneiden ſich wechſelſeitig in ihrer Mitte.

Bew. (Fig. 73). In dem Parallelogramm ABCD durchſchneiden ſich die Diagonalen in dem Punkte E; ſo iſt AB = DC (§. 56), W. BAE = ECD und W. ABE = EDC, alſo △ ABE ≌ DEC.

Folglich ist AE = EC, weil beyde in congruenten Dreyecken den gleichen Winkeln ABE und EDC gegen über liegen;

und EB = ED, weil beyde den gleichen Winkeln BAE und ECD gegen über liegen.

a. Lehrs. In einem Parallelogramme, dessen Seiten alle einander gleich sind, also im Rhombus und im Quadrate, stehen die Diagonalen in ihrem Durchschnittspunkte auf einander senkrecht.

(Hegenberg S. 85).

b. Lehrs. In jedem schiefwinkligen Parallelogramm ist die Diagonale durch die spitzen Winkel größer als die Diagonale durch die stumpfen Winkel.

Anm. Der Beweis beruht vorzüglich auf §. 54.

Art. 68. Lehrs. Jedes Viereck, dessen Diagonalen sich wechselseitig halbiren, ist ein Parallelogramm.

Bew. In dem Viereck ABCD (Fig. 73) halbiren sich die Diagonalen wechselseitig in E; so ist AE = EC, EB = ED und W. AEB = CED, also △ AEB ≅ CED.

Es ist also W. ABE = EDC, also BA ll DC.

Eben so läßt sich beweisen, daß BC ll DA ist.

Folglich ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm (§. 25).

(Clavius p. 60).

Anm. Obiger Lehrsatz kann, wie Clavius bemerkt, gebraucht werden, um schnell ein richtiges Parallelogramm geometrisch zu verzeichnen.

Art. 69. Lehrs. Jedes Viereck, in welchem die gegen über liegenden Winkel einander gleich sind, ist ein Parallelogramm.

Bew. (Fig. 73). Im Viereck ABCD sey W. C = A, und W. D = B; so ist W. C + D = A + B. Da nun die vier Winkel eines jeden Vierecks zusammen 4 Rechte (§. 34) betragen, so betragen A und B zusammen 2 Rechte. Es ist also BC ll AD (§. 19).

Eben so läßt sich beweisen, daß AB ll DC ist.

Das Viereck ABCD ist folglich ein Parallelogramm (§. 25). (Clavius p. 59).

Anm. 1. Aus der Erklärung, daß Parallelogramm ein Viereck sey, in welchem die gegen über liegenden Seiten parallel sind (§. 25), ergeben sich folgende Eigenschaften des Parallelogramms:

a) das Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwey congruente Dreyecke getheilt. §. 55.

b) Im Parallelogramm sind die gegen über liegenden Seiten einander gleich. §. 56.

c) Im Parallelogramm sind die gegen über liegenden Winkel einander gleich. §. 57.

d) Die Diagonalen des Parallelogramms halbiren sich wechselseitig. Art. 67.

Die drey letzten Sätze lassen sich gerade zu umkehren:

1) Ein Viereck, in welchem die gegen über liegenden Seiten einander gleich sind, ist ein Parallelogramm. §. 60.

2) Ein Viereck, dessen gegen über liegende Winkel einander gleich sind, ist ein Parallelogramm. Art. 69.

3) Ein Viereck, dessen Diagonalen sich wechselseitig halbiren, ist ein Parallelogramm. Art. 68.

Nur der erste Satz läßt sich nicht gerade zu umkehren, d. h. man kann nicht sagen: wenn ein Viereck durch eine Diagonale in zwey congruente Dreyecke getheilt wird, so ist es ein Parallelogramm. Denn wenn ein Viereck zweymal zwey an einander liegende gleiche Seiten hat, so wird es durch die Diagonale, welche die beyden Winkel verbindet, die von den gleichen Seiten gebildet werden, in zwey congruente Dreyecke getheilt, und ist doch kein Parallelogramm. Der erste Satz kann aber auch so ausgedrückt werden: das Parallelogramm wird durch die beyden Diagonalen, durch eine jede, in zwey congruente Dreyecke getheilt. Dieser Satz läßt sich allerdings umkehren: Ein Viereck, das durch eine jede seiner beyden Diagonalen in zwey congruente Dreyecke getheilt wird, ist ein Parallelogramm. Den Beweis dieses Satzes s. unten zu §. 69.

Anm. 2. Die leichten Sätze des Parallelogramms können sehr gut gebraucht werden, um dem Anfänger einen Begriff von dem Werth der Erklärungen in der Geometrie zu geben.

Ein jeder der drey zuletzt ausgesprochenen Sätze könnte auch als Erklärung des Parallelogrammes hingestellt, und daraus die übrigen Eigenschaften dieses Vierecks abgeleitet werden.

Anm. 3. Daß es ein Viereck gebe, in welchem die gegen über liegenden Seiten parallel sind, läßt sich leicht darthun. Man durchschneide 2 Parallellinien durch eine dritte gerade Linie und ziehe mit dieser eine vierte Linie parallel, so muß diese die beyden Parallellinien ebenfalls durchschneiden, und das Viereck schließen. Um die Parallelogramme einzutheilen, können

a) alle vier Seiten einander gleich seyn. Dabey sind

1) die zwey an derselben Seite liegenden Winkel einander gleich. Dann wird von den vier Winkeln jeder ein Rechter. Das Quadrat.

2) Oder die zwey an derselben Seite liegenden Winkel sind ungleich. Der Rhombus.

b) Es sind nur die gegen über liegenden Seiten einander gleich, die einander anliegenden sind ungleich. Dabey sind

1) die zwey an derselben Seite liegenden Winkel einander gleich. Das Rechteck.

2) Oder die zwey an derselben Seite liegenden Winkel sind ungleich. Der Rhomboides.

Ein jedes dieser vier Parallelogramme ist möglich; und unter diesen vieren sind alle möglichen Parallelogramme begriffen.

Art. 70. Lehrs. Wenn alle vier Theile der beyden sich durchschneidenden Diagonalen eines Vierecks einander gleich sind, so ist die Figur ein Rechteck [Art. 68].

Bew. (Fig. 76). AC und BD seyen die beyden Diagonalen des Vierecks ABCD, E der Durchschnittspunkt derselben, und es sey EA = EB = EC = ED.

Da EA = EC und EB = ED ist, so halbiren sich in dem Viereck ABCD die Diagonalen AC und BD wechselseitig in ihrer Mitte; das Viereck ABCD ist alsoein Parallelogramm (Art. 68).

Also ist DC = AB. Ferner ist AE + EC = EB + ED oder AC = BD; endlich ist AD = AD; also △ ABD ≅ DAC; mithin W. DAB = ADC.

Da nun die Summe der beyden Winkel DAB und ADC zwey Rechte beträgt (§. 18); so ist jeder derselben ein Rechter.

Das Parallelogramm ABCD ist also ein Rechteck.

(Hegenberg S. 87).

Lehrsätze über das Parallel-Trapez mit gleichen nicht parallelen Seiten und gleichen Diagonalen. Art. 71 bis 74.

Art. 71. Lehrs. Wenn in einem Parallel-Trapez die nicht parallelen Seiten einander gleich sind, so sind die zwey an einer der parallelen Seiten anliegenden Winkel einander gleich.

Bew. (Fig. 74). In dem Parallel-Trapez ABCD sey AB ∥ CD und AD = BC.

Man verlängere die kleinere der beyden parallelen Seiten DC, mache DE = AB und ziehe BE. Daß nämlich eine der beyden parallelen Seiten kleiner als die andere ist, ergibt sich daraus, daß das Viereck ein Parallelogramm und kein Parallel-Trapez wäre, wenn in demselben zwey gegen über liegende Seiten gleich und parallel wären (§. 59).

Da nun aber in dem Viereck ABED die Seite DE ⫲ AB ist, so ist ABED ein Parallelogramm (§. 59); also

W. E = W. A (§. 57)

und

BE = AD (§. 56)

Da nach der Voraussetzung BC = AD ist, so ist also auch BE = BC.

Das △ BEC ist also gleichschenklig, mithin

W. BCE = E

Nun ist W. ABC = BCE und W. A = E; folglich ist auch

W. A = W. ABC.

Eben so ist, da W. DCB mit ABC und W. D mit A zwey rechte ausmacht,

W. D = W. DCB.

(Hauber p. 385).

Art. 72. Lehrs. Wenn in einem Parallel-Trapez die nicht parallelen Seiten einander gleich sind, so sind die beyden Diagonalen einander gleich.

Bew. (Fig. 74).

1. Wie in Art. 71 wird bewiesen, daß die beyden Winkel ADC und BCD einander gleich sind.

2. Nun ist DC = DC, AD = BC und W. ADC = BCD, also △ ADC ≌ BCD; folglich AC = BD.

(Hauber p. 385).

Art. 73. Lehrs. Wenn in einem Parallel-Trapez die Diagonalen einander gleich sind, so sind die nicht parallelen Seiten, und auch die zwey Winkel, die an einer der parallelen Seiten anliegen, unter einander gleich.

Bew. (Fig. 75). In dem Parallel-Trapez ABCD sey DC ‖ AB und BD = AC.

Man verlängere AB, mache AG = CD und ziehe DG, so ist, da CD ‡ AG ist, das Viereck AGDC ein Parallelogramm (§. 59), also GD = AC; also auch, da AC = BD ist, GD = BD; mithin ist GBD ein gleichschenkliges Dreyeck; folglich W. G = DBG. Nun ist aber auch W. G = CAB. Also ist auch

W. CAB = DBA.

Da nun AB = AB, AC = BD und W. CAB = DBA ist; so ist auch

$\triangle$ CAB $\cong$ DBA

folglich

erstens BC = AD

und

zweytens W. CBA = DAB

Was von der Gleichheit der W. CBA und DAB gilt, gilt auch von den Winkeln BCD und ADC, da diese mit jenen zwey rechte Winkel ausmachen.

(Hauber p. 385).

Art. 74. Lehrs. Wenn in einem Viereck zwey gegen über liegende Seiten, und zugleich die beyden Diagonalen einander gleich sind; so sind die beyden andern Seiten des Vierecks einander parallel.

Bew. (Fig. 74). In dem Viereck ABCD sey AD = BC und BD = AC, so ist, da auch AB = AB ist,

$\triangle$ ABD $\cong$ ABC (§. 38)

und, da auch DC = DC ist,

$\triangle$ ADC $\cong$ BCD (§. 38).

Aus der Congruenz jener beyden Dreyecke folgt

W. DAB = CBA

und aus der Congruenz dieser

W. ADC = BCD

also

W. DAB + ADC = CBA + BCD.

Da nun die Summe aller Winkel eines Vierecks jedesmal 4 rechte beträgt, und sowohl DAB + ADC, als auch CBA + BCD die Hälfte dieser Summe ist; so ist sowohl DAB + ADC, als auch CBA + BCD = 2 R. Folglich ist DC ‖ AB (§. 19).

(Hauber p. 387).

---

a. Wie verhält es sich mit einem Viereck, in welchem zwey gegen über liegende Seiten einander gleich, und die

zwey andern parallel sind? Ist dasselbe jedesmal ein Parallelogramm?

Art. 75. Lehrs. Wenn man auf den vier Seiten eines Quadrats vier Punkte bestimmt, welche (indem man auf dem Umfang des Quadrats nach einer Richtung herum geht) von den vier Ecken des Quadrats gleich weit entfernt sind, und diese vier Punkte durch vier gerade Linien verbindet: so bilden diese vier gerade Linien wieder ein Quadrat.

Bew. (Fig. 77). FKIL sey das gegebene Quadrat. Es seyen von den Ecken F, K, I, L aus, gegen K, I, L, F hin, vier unter sich gleiche Stücke FB, KC, ID, LE abgeschnitten, und die vier geraden Linien BC, CD, DE, EB gezogen; so ist zu beweisen, daß BCDE ein Quadrat sey.

Da

FK = KI = IL = LF, als Seiten eines Quadrats,

und

FB = KC = ID = LF, nach der Voraussſ.,

ist, so ist auch, indem man Gleiches von Gleichem subtrahirt,

BK = CI = DL = EF

Nun ist aber auch

W. F = K = I = L, als Winkel eines Quadrats.

Mithin sind in den vier von dem Quadrat FKIL abgeschnittenen Dreyecken zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich. Daher ist (§. 39)

△ EFB ≌ BKC ≌ CID ≌ DLE

daher

EB = BC = CD = DE

Das Viereck EBCD ist also gleichseitig. Ferner ist

W. FBE = KCB = IDC = LED

und

W. KBC = ICD = LDE = FEB

also auch, indem man jede zwey dieser Winkel, wie FBE und KBC, addirt, und die Summe von 2 R. (da die Summe aller Winkel, die neben einander, und deren beyde äußern

Schenkel in gerader Linie liegen, wie FBE, KBC und EBC, zusammen 2 R. betragen §. 11) abzieht,

W. EBC = BCD = CDE = DEB

Das gleichseitige Viereck EBCD ist also auch gleichwinklig.

Folglich ist es ein Quadrat.

(Th. Simpson, p. 27).

Anm. Von diesem Satze (mit dem man Art. 15. Anm. 1. vergleiche) wird zu einem sehr anschaulichen Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes (s. unten zu §. 79), welcher bloß die Lehre von der Congruenz der Figuren voraussetzt, Anwendung gemacht. Unten sind noch mehre Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes, welche, außer dem Begriff der Gleichheit aus der ganzen Lehre von der Gleichheit der Figuren nichts weiter voraussetzen, zusammen gestellt. Alle diese können hier schon mit den Schülern zweckmäßig behandelt werden.

Art. 76. Lehrs. Wenn auf einer Seite eines Dreyecks wey unter sich gleiche Stücke abgeschnitten und durch die Endpunkte der abgeschnittenen Stücke gerade Linien mit der zweyten Seite des Dreyecks parallel gezogen werden, bis sie die dritte Seite des Dreyecks durchschneiden; so sind die zwischen den parallelen Linien enthaltenen Abschnitte der dritten Seite ebenfalls unter einander gleich.

Bew. (Fig. 78). Auf der Seite AB des Dreyecks ABC sey IK = KL, und durch I, K und L seyen die Linien IE, KF und LG der zweyten Seite BC des Dreyecks parallel gezogen, bis sie die dritte Seite AC des Dreyecks in den Punkten E, F und G treffen; so ist zu beweisen, daß E = FG sey.

Man ziehe durch E und F die Linien EO und FN der AB parallel, so sind EOKI und FNLK Parallelogramme (§. 25), also EO = IK und FN = KL (§. 56). Da nun, nach der Voraussetzung, IK = KL ist, so ist auch EO = FN.

Ferner ist W. FEO = GFN und W. EFO = FGN (§. 16), also △ FEO ≌ GFN, folglich EF = FG.

Anm. Aus diesem Lehrsatz folgt, daß wenn die eine Seite eines Dreyecks in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt ist und durch die Theilungspunkte gerade Linien parallel mit der zweyten Seite des Dreyecks gezogen werden, bis sie des Dreyecks dritte Seite durchschneiden, diese dritte Seite dadurch in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt werde.

Weiter läßt sich daraus ableiten, daß wenn man eine Linie parallel mit einer Seite des Dreyecks zieht, diese die beyden andern Seiten des Dreyecks nach einerley Verhältnisse theile, oder daß sich die ganzen Seiten wie die Stücke oberhalb der parallelen Linie verhalten (§. 89). Wirklich gründen darauf Th. Simpson und Kries weit zweckmäßiger die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke, als diese von Euklid auf die Gleichheit der Dreyecke von gleicher Grundlinie und Höhe (s. Euklid Buch VI, Satz 3) gebaut wird.

Art. 77. Lehrs. Wenn ein Punkt innerhalb eines Dreyecks die Beschaffenheit hat, daß drey gerade Linien, von ihm aus nach den Ecken des Dreyecks gezogen, drey unter einander gleiche Winkel bilden; so ist die Summe dieser drey Linien kleiner als die Summe jeder andern drey Linien, welche von irgend einem andern Punkte nach den drey Ecken des Dreyecks gezogen werden.

Bew. (Fig. 79—83). In dem △ ABC habe der Punkt D die Beschaffenheit, daß wenn man die Linien DA, DB, DC zieht, die Winkel ADB, ADC und BDC unter einander gleich, also jeder derselben $= \frac{4}{3}$ R. ist.

E sey ein beliebiger anderer Punkt.

Erster Fall. Wenn der Punkt E auf einer der drey, vom Punkt D aus nach den drey Ecken des Dreyecks gezogenen Linien liegt (Fig. 79).

Der Punkt E liege auf DC. Man fälle aus demselben die Perpendikel EF und EH auf die Verlängerungen von AD und BD, und ziehe mit AF parallel die gerade Linie HN, welche die DC in O und die EF in N durchschneidet.

Es ist nun $\triangle$ EDF $\cong$ EDH (§. 40), also DH $=$ DF.

Da ferner W. HDO $= \frac{2}{3}$ R., und W. DHO $=$ BDF $= \frac{2}{3}$ R., so ist das $\triangle$ DHO gleichseitig (§. 34 und 50); also DO $=$ DH $=$ OH.

Im $\triangle$ OHE ist W. OHE $=$ 1 R. $-$ DHO $= \frac{1}{3}$ R. und W. HEO $=$ 1 R. $-$ HDE $= \frac{1}{3}$ R.; also W. OHE $=$ HEO, mithin das $\triangle$ OHE gleichschenklig (§. 49); also OE $=$ OH.

Da OH $=$ DH und DH $=$ DF ist, so ist mithin OE $=$ DF. Da überdem DO $=$ DH ist, so ist

$$OE + DO = DF + DH$$

Daher ist auch

$$CE + OE + DO + AD + BD$$
$$= CE + AD + DF + BD + DH$$

oder

$$CD + AD + BD = CE + AF + BH$$

Da nun, wenn man sich AE und BE gezogen denkt, AE $>$ AF und BE $>$ BH ist (§. 52), so ist

$$CE + AE + BE > CE + AF + BH$$

folglich auch

$$CE + AE + BE > CD + AD + BD.$$

Zweyter Fall. Wenn der Punkt E auf der über D hinaus gehenden Verlängerung von einer der drey, aus dem Punkt D nach den Ecken des Dreyecks gezogenen, Linien liegt.

Der Punkt E liege auf der Verlängerung von AD (Fig. 80). Man fälle aus E die Perpendikel EH und EL auf BD und CD, und ziehe EQ $\parallel$ DB bis sie die DC in Q trifft; so ist $\triangle$ ELD $\cong$ EHD (§. 40), also DL $=$ DH.

Ferner ist W. EDQ $= \frac{2}{3}$ R., und W. QED $=$ EDB $= \frac{2}{3}$ R., also das $\triangle$ EDQ gleichseitig; mithin DQ $=$ ED.

Nun ist aber auch $\triangle$ ELQ $\cong$ ELD (§. 40), mithin LQ $=$ LD $=$ DH.

Daher ist

$$ED + LD + LQ = LD + DH$$

mithin

$$AD + DE + BH + CL$$
$$= AD + BH + HD + CL + LD$$

oder

$$AE + BH + CL = AD + BD + CD$$

Da nun, wenn man sich BE und CE gezogen denkt, BE > BH und CE > CL ist (§. 52), so ist

$$AE + BE + CE > AE + BH + CL$$

folglich auch

$$AE + BE + CE > AD + BD + CD.$$

Dritter Fall. Wenn der Punkt E auf einem Perpendikel liegt, das man im Punkte D auf eine der drey, aus dem Punkte D nach den Ecken des Dreyecks gezogenen, Linien errichtet.

Der Punkt E (Fig. 81) liege auf dem Perpendikel DP, das in D auf BD errichtet ist. Man fälle das Perpendikel EL auf CD und das Perpendikel EF auf die Verlängerung von AD; so ist △ DEF ≌ DEL (§. 40), also DF = DL, daher

$$BD + AD + DF + CL$$
$$= BD + AD + DL + CL$$

oder

$$BD + AF + CL = BD + AD + CD$$

Da nun, wenn man sich EA, EB und EC gezogen denkt, EA > AF, EB > BD und EC > CL ist, so ist

$$EB + EA + EC > BD + AF + CL$$

folglich auch

$$EB + EA + EC > BD + AD + CD.$$

Vierter Fall. Wenn der Punkt E zwischen dem Perpendikel des dritten Falls und der Verlängerung von einer der drey Linien liegt, oder außerhalb dieser verlängerten Linie so liegt, daß zwey der Perpendikel, welche von ihm aus auf die drey Linien gezogen werden können, auf diese Linien selbst fallen.

Der Punkt E (Fig. 82) liege zwischen dem Perpendikel DP (in der Figur ist dasselbe nicht gezeichnet, sondern nur sein Durchschnittspunkt P mit der Seite BC angedeutet) und der Verlängerung DF von AD. Man fälle die Perpendikel EF auf die Verlängerung von AD, und die Perpendikel EG und EH auf CD und BD. EH wird die Verlängerung von AD in einem Punkte R durchschneiden. Man ziehe ferner durch R die Linie $ST \parallel DC$, welche die BD in T und das Perpendikel EG in S durchschneidet, und ziehe $RV \parallel EG$, bis sie die CD in V trifft.

Es ist $RE = RE$, W. $REF = RES = \frac{2}{3}$ R. und W. $RFE = RSE = 1$ R., also $\triangle\, RFE \cong RSE$ (§. 40), mithin $RF = RS$. Ferner ist RVGS ein Parallelogramm (§. 25), also $VG = RS = RF$.

Ferner ist W. $DRT = RDC = \frac{2}{3}$ R., und W. $RDT = \frac{2}{3}$ R., also das $\triangle$ RDT gleichseitig, mithin $TD = RD$.

Da in dem gleichseitigen $\triangle$ TRD die Linie RH senkrecht auf TD ist, so ist (§. 46) $TH = HD$. Nun ist auch $\triangle\, HDR \cong VDR$, also $HD = DV$. Daher ist auch $TH = DV$.

Daher ist $HD + DV + VG = DR + RF$

oder

$$HD + DG = DF$$

mithin

$$BH + HD + DG + GC + AD$$
$$= BH + AD + DF + GC$$

oder

$$BD + DC + AD = BH + AF + GC$$

Denkt man sich nun die Linien BE, AE und CE gezogen, so ist (§. 52) $BE > BH$, $AE > AF$ und $CE > CG$, also

$$BE + AE + CE > BH + AF + GC$$

folglich auch

$$BE + AE + CE > BD + DC + AD.$$

Fünfter Fall. Wenn der Punkt E zwischen dem Perpendikel des dritten Falls und einer der drey, aus dem

Punkte D nach den Ecken des Dreyecks gezogenen, Linien liegt, oder so liegt, daß nur eins der Perpendikel, welche von ihm aus auf die drey Linien gezogen werden können, auf diese Linie selbst, die beyden andern Perpendikel aber auf die Verlängerungen dieser Linien fallen.

Der Punkt E (Fig. 83) liege zwischen dem Perpendikel DP (dieses ist in der Figur ebenfalls nicht gezeichnet, wie beym vierten Fall) und der Linie DC. Man fälle das Perpendikel EG auf DC, und die Perpendikel EF und EH auf die Verlängerungen von AD und BD. Das Perpendikel EH wird die CD in einem Punkte I durchschneiden. Man ziehe ferner durch I der AF die LK parallel, welche die Verlängerung von BD in L und die EF in K durchschneidet, und ziehe die DM ‖ FE, bis sie die LK in M trifft.

Nun ist W. LID = IDF = $\frac{2}{3}$ R., und W. LDI = $\frac{2}{3}$ R., also DLI ein gleichseitiges Dreyeck, mithin DI = DL = LI. Da IH senkrecht auf DL ist, so ist DH = HL (§. 46). Eben so ist DM senkrecht auf LI, also LM = MI, mithin, da DL = LI ist, auch DH = LM. Ferner ist DMKF ein Parallelogramm, also DF = MK (§. 56).

Daher ist

$$DH + DF = LM + MK = LK$$

Nun ist aber auch △ IKE ≌ IGE (§. 40), also IK = IG, mithin

$$IK + IL = IG + ID$$

oder

$$LK = DG.$$

Daher ist

$$DH + DF = DG$$

mithin

$$BD + DH + AD + DF + CG$$
$$= BD + AD + DG + CG$$

oder

$$BH + AF + CG = BD + AD + CD.$$

Denkt man sich nun die Linien BE, AE und CE gezogen, so ist (§. 52) BE > BH, AE > AF und CE > CG, also

$$BE + AE + CE > BH + AF + CG$$

folglich auch

$$BE + AE + CE > BD + AD + CD.$$

Anm. Th. Simpson, welcher (p. 196) einen Beweis unseres Lehrsatzes gibt, beschränkt sich darin bloß auf den fünften Fall. Auch kann man sich, zur Uebung für Schüler, mit einem der Fälle, namentlich mit dem vierten oder fünften, begnügen, indem man dann auf die hier möglichen Fälle keine weitere Rücksicht nimmt. — Daß der Satz sich auch auf Punkte E erstrecke, welche außerhalb des Dreyecks ABC oder auf seinem Umfange liegen, ist leicht zu übersehen. — Denkt man sich den Punkt E mit einer der Ecken des Dreyecks, z. B. mit C, zusammen fallend, so erhält man den Satz, daß, wenn bey D lauter Winkel $= \frac{4}{3}$ R. sind, AC + CB > AD + BD + CD ist. — Eben so übersieht man leicht, daß es Dreyecke gibt, in welchen kein Punkt D Statt findet, von welchem aus drey Linien, nach den Ecken des Dreyecks gezogen, drey unter sich gleiche Winkel bilden.

Eigenschaften von Punkten innerhalb eines Dreyecks, in Hinsicht auf die Summe zweyer Linien, die sich von ihnen aus ziehen lassen, nach Pappus. Art. 78 bis 80.

Art. 78. Lehrs. Innerhalb eines jeden ungleichseitigen Dreyecks gibt es Punkte, aus welchen sich zwey gerade Linien auf eine Seite ziehen lassen, die, zusammen genommen, den beyden andern Seiten des Dreyecks zusammen genommen gleich sind.

Bew. (Fig. 84). ABC sey ein ungleichseitiges Dreyeck, AB > BC. Man verlängere AB, mache die Verlängerung BM = BC, und halbire AM in D; so fällt, da AB > BC, also auch > BM ist, der Punkt D zwischen A und B. Man

nehme zwischen D und B einen beliebigen Punkt E an, und ziehe EF ∥ AB.

Auf EF nehme man innerhalb des Dreyecks einen beliebigen Punkt G an, ziehe GH ∥ AB und ziehe GC.

Da nun (§. 53)

$$EB + BF > EF$$

und

$$GF + FC > GC$$

ist, so ist auch

$$EB + BF + FC + GF > EF + GC$$
$$\text{oder} > EG + GF + GC$$

also auch

$$EB + BF + FC > EG + GC$$

oder

$$EB + BC > EG + GC.$$

Um so mehr also ist

$$EB + BC > GC.$$

Man verlängere GC über C hinaus nach K, und mache GK = EB + BC.

Da nun EB + BC = EB + BM, also < DM, oder < AD; so ist GK < AD.

Um so mehr ist GK < AE.

Nun ist aber EG ∥ AH und HG ∥ AE, also (§. 25) AHGE ein Parallelogramm, daher HG = AE (§. 56).

Folglich ist auch GK < GH.

Man trage nun von G aus zur AC die GL = GK; so kann der Punkt L nicht über H hinaus nach der Seite von A hin fallen. Denn, da in dem △ GHL die Seite GL < GH ist, so ist darin auch W. GHL < GLH (§. 51), also W. GHL ein spitzer Winkel. Dagegen ist W. GHA ein stumpfer Winkel, weil er mit dem W. BAC, der im △ BAC einer kleineren Seite BC gegen über steht, also ein spitzer Winkel ist, 2 R. ausmacht. Fiele also der Punkt L über H hinaus auf die Seite von A hin, so wäre W. GHL ein stumpfer Winkel, was nicht seyn kann.

Es sind also GH und GL zwey nach der Seite AC des △ BAC aus einem innerhalb desselben liegenden Punkte G gezogene gerade Linien.

Nun ist aber GH + GL = GH + GK = AE + EB + BC = AB + BC.

Folglich ist G ein Punkt innerhalb des △ ABC, aus welchem die beyden geraden Linien GH und GL, zusammen genommen, den beyden Seiten AB und BC zusammen genommen gleich sind.

(Pappus lib. III, prop. 29).

Art. 79. Lehrs. Innerhalb eines jeden gleichschenkligen Dreyecks, dessen Grundlinie größer als eine der beyden gleichen Seiten ist, gibt es Punkte, aus welchen sich zwey gerade Linien auf die Grundlinie ziehen lassen, die, zusammen genommen, den beyden gleichen Seiten des Dreyecks zusammen genommen gleich sind.

Bew. ABC (Fig. 85 und 86) sey ein gleichschenkliges Dreyeck, in welchem die Grundlinie AC größer als eine der beyden gleichen Seiten AB oder BC sey; so läßt sich in demselben aus A nach der gegen über liegenden Seite BC eine gerade Linie AF ziehen, die > AB ist. Denn, wenn das △ ABC an seiner Spitze B rechtwinklig oder stumpfwinklig ist, so ist in dem △ ABF (Fig. 85) der Winkel ABF der größte Winkel, also (§. 51) AF die größte Seite. Wenn aber der W. ABC ein spitzer ist (wie Fig. 86), so gibt es zwischen B und C noch einen Punkt D von der Beschaffenheit, daß AD = AB und W. ADB = ABD ist. In diesem Falle ist W. ADB ein spitzer, also sein Nebenwinkel ADC ein stumpfer Winkel. Zieht man nun zwischen AD nnd AC eine beliebige gerade Linie AF, so steht diese in dem △ ADF dem stumpfen Winkel ADC gegen über, ist also > AD oder AB.

Man ziehe demnach in dem △ ABC (Fig. 85) eine gerade Linie AF, die > AB ist, und schneide von derselben ein Stück AE = AB ab. Zwischen E nnd F nehme man einen beliebigen Punkt G an, und ziehe die GH ll AC, bis sie

die BC in H trifft. Ferner nehme man auf GH einen beliebigen Punkt K an, ziehe KL ‖ AG, und ziehe KC.

Man schneide auf BC die BN = EG ab, so ist AG = AB + BN.

Nun ist (§. 53)

$$GF + FH > GK + KH$$

und

$$KH + HC > KC$$

also auch

$$GF + FH + KH + HC > GK + KH + KC$$

daher auch, wenn man KH wegnimmt,

$$GF + FH + HC > GK + KC$$

also auch

$$AG + GF + FH + HC > AG + GK + KC$$

oder

$$AF + FC > AG + GK + KC$$

Nun ist aber wieder

$$AB + BF > AF$$

also auch

$$AB + BF + FC > AF + FC$$

Um so mehr ist daher

$$AB + BF + FC > AG + GK + KC$$

oder

$$AB + BN + NC > AG + GK + KC$$

also auch, da AB + BN = AG ist,

$$NC > GK + KC$$

Um so mehr ist

$$NC > KC.$$

Man trage nun von K aus zur AC die KM = NC, so wird dieselbe, da NC > KC ist, die AC erreichen.

Da GK ‖ AL und KL ‖ GA ist, so ist ALKG ein Parallelogramm (§. 25), also KL = AG (§. 56).

Es ist aber AG = AB + BN, also, da AB = BC ist, AG = BC + BN = NC + 2. BN, mithin AG > NC; daher ist auch KL > KM. Der Punkt M kann also nicht

über L hinaus nach der Seite von A hin fallen (vgl. den Beweis des vorigen Art.).

Nun ist LK + KM = AG + NC = AB + BN + NC = AB + BC. K ist also ein Punkt innerhalb des gleichschenkligen △ ABC, von welchem aus die beyden Linien KL und KM nach der Grundlinie AC gezogen, zusammen genommen, so groß sind, als bie beyden gleichen Seiten AB und BC zusammen genommen.

(Pappus lib. III. prop. 29).

Art. 80. Lehrs. In einem gleichseitigen Dreyeck und in einem gleichschenkligen, dessen Grundlinie kleiner als eine der beyden gleichen Seiten ist, lassen sich von einem Punkte innerhalb desselben keine zwey gerade Linien nach der Grundlinie ziehen, deren Summe nicht kleiner als die Summe der beyden gleichen Seiten des Dreyecks wäre.

Bew. (Fig. 87). Es sey ABC entweder ein gleichseitiges Dreyeck, oder ein gleichschenkliges, dessen Grundlinie AC kleiner als eine der beyden gleichen Seiten AB und BC sey. Aus einem beliebigen Punkte E innerhalb desselben seyen die geraden Linien ED und EG nach der Grundlinie AC gezogen, so ist zu beweisen, daß ED + EG < BA + BC ist.

Man verlängere DE und GE bis sie den Seiten BC oder AB in F und H begegnen. [Es können nämlich die beyden Linien DE und GE entweder beyde zugleich derselben Seite des △ ABC, oder die eine kann der Seite BC und die andere der Seite AB begegnen.] Die DE treffe die Seite BC in F. Man ziehe aus dem Durchschnittspunkt F eine gerade Linie FA nach der gegen über liegenden Ecke A.

Da W. BCA = BAC, so ist W. BCA > FAC. Nun ist aber auch W. FDA > BCA (§. 30). Um so mehr ist also W. FDA > FAC; daher ist AF > DF (§. 51).

Da ferner W. AFB > ACB ist (§. 30) und W. ABC entweder = ACB, wenn das △ ABC gleichseitig, oder < ACB ist, wenn das △ ABC gleichschenklig und zugleich

AC < AB ist (§. 51); so ist auch W. AFB > ABC; daher AB > AF (§. 51).

Um so mehr ist also AB > DF.

Und wieder um so mehr ist AB > DE, d. h. die eine der beyden gleichen Seiten des Dreyecks ABC ist größer als die eine der beyden aus E nach der Grundlinie AC gezogenen geraden Linien.

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß eine der beyden gleichen Seiten des △ ABC größer als die andere der beyden aus E nach der Grundlinie AC gezogenen geraden Linien ist.

Folglich ist AB + BC > DE + EG.

(Pappus lib. III. prop. 30).

Anm. 1. Pappus stellt diesen Lehrsatz so, als wenn in einem gleichschenkligen Dreyeck, dessen Grundlinie kleiner als eine der beyden gleichen Seiten ist, überhaupt keine zwey gerade Linien gezogen werden könnten, deren Summe der Summe der beyden äußeren Seiten des Dreyecks gleich wäre. Dieß widerspricht aber dem Lehrsatz Art. 78, da sich nach demselben gar wohl aus einem Punkte in der Gegend von C nach der Seite AB zwey Linien ziehen lassen, die zusammen = BC + AC sind.

Anm 2. Aus obigen Lehrsätzen ergibt sich sogleich als leichte Folgerung: daß in allen Dreyecken, in welchen zwey Linien gezogen werden können, deren Summe der Summe der zwey äußeren Seiten des Dreyecks gleich ist, auch zwey Linien gezogen werden können, deren Summe größer als die Summe der zwey äußeren Seiten des Dreyecks ist (Pappus lib. III. prop. 31). „Und," fährt Pappus (prop. 32) fort, „da dieses denjenigen bewundernswürdig erscheint, welche der Geometrie unkundig sind, so wird es ihnen noch bewundernswürdiger seyn, daß nicht nur beyde zugleich beyden zugleich gleich oder größer, sondern daß auch die einzelnen derselben, welche innerhalb errichtet werden, den einzelnen derselben, welche außerhalb, sowohl gleich als größer seyn können." Die Construction bleibt dem Leser überlassen. Pappus bringt bis prop. 39 noch viele

Sätze bey, die hierher gehören, die mir aber nicht zweckmäßig schien, in die Sammlung aufzunehmen. Ich setze nur noch die leichte Construction eines besonderen Falles hierher, wo in einem Dreyeck zwey Linien gezogen werden, die zusammen größer als die beyden äußeren Seiten des Dreyecks sind. Diesen Satz hat auch Proklus in seinem Commentar zu Euklid I. 21 (= Art. 40) (s. Barocius p. 128) aufgenommen. In Pappus geht er (prop. 28) den Lehrsätzen Art. 78 bis 80 voraus.

Es sey ABC (Fig. 88) ein rechtwinkliges Dreyeck, rechtwinklig in B. Man ziehe aus A nach BC eine beliebige gerade Linie AD, so ist diese (§. 52) größer als AB. Man schneide darauf DE = AB ab, halbire AE in F und ziehe FC, so ist DF + FC > BA + AC. Denn es ist

$$AF + FC > AC$$

also auch, da EF = AF ist,

$$EF + FC > AC$$

Nun ist DE = AB; daher

$$DE + EF + FC > AB + AC$$

oder

$$DF + FC > AB + AC.$$

Zu §. 62.

Art. 81. Aufg. Einen gegebenen Winkel an einen gegebenen Punkt einer geraden Linie zu tragen (§. 62 a.).

Aufl. (Fig. 89). A sey der gegebene Winkel, BC die gegebene gerade Linie, man soll an BC einen Winkel CBL machen, der dem gegebenen Winkel A gleich ist.

Man beschreibe mit beliebigem Halbmesser AD, aus A als Mittelpunkt, einen Kreisbogen DE, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels in D und E durchschneidet.

Hierauf beschreibe man mit dem Halbmesser BF = AD, aus B als Mittelpunkt, einen Kreisbogen FG.

Man denke sich die gerade Linie ED gezogen, und beschreibe, aus F als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser FK = ED,

einen Kreisbogen HI, welcher den Kreisbogen FG in K durchschneidet.

Endlich ziehe man durch B und K die gerade Linie BL; so ist CBL der verlangte Winkel.

Bew. Man denke sich noch die geraden Linien KF und ED gezogen; so ist, in den Dreyecken BFK und ADE, BK = BF = AD = AE und die dritte Seite FK = DE; also △ BFK ≌ AED (§. 38); mithin W. FBK oder CBL = A (§. 41).

Anm. 1. In obiger Auflösung wird stillschweigend als Postulat vorausgesetzt, daß man von einer gegebenen geraden Linie BC ein Stück BF abschneiden könne, das einer gegebenen Linie AD gleich ist. Ich erinnere mich, indem ich dieses schreibe, keines neueren Lehrbuches der Geometrie, worin von dieser Voraussetzung nicht ebenfalls stillschweigend Gebrauch gemacht würde. In der Praxis könnte man sich hierzu eines Lineals oder Meßstäbchens bedienen, das man mit seiner Schärfe an AD legte, darauf die Größe von AD mit Bleystift bezeichnete, dieses Lineal hierauf so an BC legte, daß das Zeichen für den Punkt A an B träfe, und endlich den Punkt F bestimmte, der dem Zeichen für den Punkt D entspräche. Bequemer aber bedient man sich hierzu des unter dem Namen Zirkel bekannten Instrumentes.

Euklid nimmt kein solches Postulat an; sondern bey ihm enthält der dritte Satz des ersten Buches die Aufgabe: „Wenn zwey ungleiche gerade Linien gegeben sind, von der größeren eine gerade Linie wegzunehmen, die der kleineren gleich ist." Für die Auflösung dieser Aufgabe geht in dem zweyten Satz die Aufgabe voraus: „An einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu legen, die einer gegebenen geraden Linie gleich ist;" und wegen der Auflösung dieser Aufgabe wieder steht endlich, im ersten Satze die Aufgabe: „Ueber einer gegebenen begränzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben." Man sehe über diese Aufgaben den Euklid selbst nach.

Anm. 2. Proklus schreibt die Erfindung dieses Satzes dem Oenopides zu. S. Procl. Baroc. p. 191.

Art. 82. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer geraden Linie eine Parallellinie zu ziehen (§. 62. b).

Aufl. (Fig. 90). AB sey die gegebene gerade Linie, C der gegebene Punkt außerhalb derselben. Man nehme auf AB einen beliebigen Punkt D an, ziehe CD, trage daran in C den Winkel ECD = CDB (§. 62 a.) und verlängere EC über C hinaus nach F, so ist EF die verlangte Parallellinie.

Bew. Da W. ECD = CDB ist, so bilden die beyden Linien EF und AB mit der schneidenden Linie DC gleiche Wechselswinkel (§. 19, b).

Anm. 1. Man konnte auch DC über C hinaus nach G verlängern, und an CG in C den W. GCF = CDB tragen. Dann entstanden nämlich gleiche correspondirende Winkel.

Anm. 2. Sehr practisch ist folgende geometrische Auflösung: Man beschreibe ein Parallelogramm CDBF (Fig. 91), indem man CF = DB und BF = CD macht. Dann wird nämlich CF ‖ DB, nach §. 60. Diese Auflösung wird vorzüglich dann mit Vortheil angewandt, wenn von dem Punkt C schon eine Linie CD nach AB oder DB gezogen ist, ein Fall, der sehr häufig eintritt.

Anm. 3. Zur mechanischen Verzeichnung der Parallellinien gebraucht man

a) die s. g. Parallellineale. Eine Einrichtung derselben ist die, daß zwey Lineale durch zwey gleich lange Messingstäbchen, die um in die Lineale geschlagene Stiftchen beweglich sind, mit einander in Verbindung stehen. Die Stiftchen des einen Lineals stehen eben so weit von einander, als die Stiftchen des andern; beyde bilden also zusammen jedesmal die vier Ecken eines Parallelogramms. — Eine andere Einrichtung besteht in einem mit Rädchen versehenen Lineale, das von der gegebenen Linie bis zu dem gegebenen Punkte fortbewegt wird.

b) Das gewöhnliche Lineal in Verbindung mit dem rechten Winkel oder Winkellineal. Man legt das Winkellineal an die Seite der gegebenen Linie, auf welcher der gegebene Punkt nicht ist, und zwar so, daß eine seiner Seiten längs der ge-

gebenen Linie liegt. Darauf legt man das lange Lineal an die andere Seite des Winkellineals so an, daß der gegebene Punkt in den Winkel fällt, den beyde Lineale mit einander machen. Nun hält man das lange Lineal fest, schiebt das Winkellineal längs desselben bis an den gegebenen Punkt fort, und zieht nun durch diesen Punkt eine gerade Linie; so ist diese mit der gegebenen parallel. Denn beyde Linien machen mit dem langen Lineal, als schneidender Linie, gleiche correspondirende Winkel.

Anm. 4. Um mit einer gegebenen Linie eine andere parallel zu ziehen, welche einen gegebenen Abstand von derselben habe; errichte man auf der gegebenen Linie ein Perpendikel, u. s. w.

Art. 83. Aufg. Aus drey gegebenen Seiten ein Dreyeck zu verfertigen (§. 62. c.).

Aufl. (Fig. 92). Es seyen die drey Linien AB, CD und EF gegeben; man soll daraus, als Seiten, ein Dreyeck verfertigen.

Man mache GH = AB; beschreibe aus G als Mittelpunkt mit dem Halbmesser GI = CD einen Kreisbogen KL, und aus H als Mittelpunkt mit dem Halbmesser HI = EF einen Kreisbogen MN, welcher den Bogen KL in I durchschneidet, und ziehe die geraden Linien GI und HI; so ist GHI das verlangte Dreyeck.

Bew. Da GH = AB, GI = CD und HI = EF ist; so hat das Dreyeck GHI die drey gegebenen Seiten.

Anm. 1. Es versteht sich von selbst, daß nur dann ein Dreyeck aus drey gegebenen Linien verzeichnet werden kann, wenn jede zwey derselben zusammen genommen größer als die dritte sind (§. 53).

Anm. 2. Um über einer gegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben, nehme man die beyden andern Seiten der ersten gleich.

Anm. 3. Eben so kann man über einer gegebenen geraden Linie ein gleichschenkliges Dreyeck verzeichnen, es sey nun, daß

die Länge der beyden gleichen Seiten gegeben ist, oder daß dieselbe willkührlich angenommen werden darf.

Art. 84. Aufg. Aus zwey gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ein Dreyeck zu verfertigen (§. 62. d.).

Aufl. (Fig. 93). Es seyen die zwey Linien AB und CD, und der W. E als von denselben eingeschlossener Winkel gegeben; man soll daraus ein Dreyeck verfertigen.

Man mache FG = AB, trage daran in F den W. GFH = E (§. 62. a.), schneide auf dessen Schenkel FH die FI = CD ab, und ziehe GI; so ist FGI das verlangte Dreyeck.

Bew. Da FG = AB, FI = CD und W. GFI = E ist; so hat das △ GFI die zwey gegebenen Seiten und zwischen denselben den gegebenen Winkel.

Anm. Es läßt sich leicht übersehen, daß das Dreyeck immer möglich ist, die gegebenen Seiten und der gegebene Winkel mögen eine Größe haben, welche sie wollen.

Art. 85. Aufg. Aus einer gegebenen Seite und zwey anliegenden Winkeln ein Dreyeck zu verfertigen (§. 62. e.)

Aufl. (Fig. 94). Es seyen die Linie AB, und die Winkel C und D, als an derselben anliegende Winkel, gegeben; man soll daraus ein Dreyeck verfertigen.

Man mache EF = AB, trage an EF in E den W. FEG = C und in F den W. EFG = D, und verlängere die Schenkel EG und FG, bis sie sich in G durchschneiden; so ist EFG das verlangte Dreyeck.

Bew. Da EF = AB, W. E = C und W. F = D ist; so hat das Dreyeck EFG die gegebene Linie zur Seite, und die beyden gegebenen Winkel zu derselben anliegenden Winkeln.

Anm. Es versteht sich von selbst, daß die Construction es Dreyecks nur dann möglich ist, wenn die beyden gegebenen Winkel zusammen weniger als 2 R. betragen (§. 28).

Art. 86. Aufg. Aus zwey gegebenen Seiten und einem anliegenden Winkel ein Dreyeck zu verfertigen.

Aufl. (Fig. 95). Es seyen die Linien AB und CD, und der W. E, als an der Seite AB anliegender Winkel, gegeben; man soll daraus ein Dreyeck verfertigen.

Man mache FG = AB, trage daran in F den W. GFH = E, beschreibe von G als Mittelpunkt aus mit dem Halbmesser GH = CD einen Kreisbogen, welcher den Schenkel FH in den Punkten H und I durchschneidet, und ziehe die geraden Linien GH und GI; so ist GFH oder GFI das verlangte Dreyeck.

Bew. 1) Da GF = AB, GH = CD und W. F = E ist; so hat das Dreyeck GFH die zwey gegebenen Linien zu Seiten, und den gegebenen Winkel als den an der einen Seite anliegenden Winkel.

Eben so 2), da GF = AB, GI = CD und W. F = E ist; so hat das △ GFI ebenfalls die zwey gegebenen Linien zu Seiten, und den gegebenen Winkel als den an der einen Seite anliegenden Winkel.

Anm. Wenn der an der größeren der beyden gegebenen Seiten anliegende, also der der kleineren derselben gegen über liegende, Winkel gegeben ist; so gibt es zwey von einander verschiedene Dreyecke, welche die gegebenen Stücke enthalten, so lange die kleinere Seite größer als das Perpendikel aus G auf FH ist. Wenn die kleinere Seite diesem Perpendikel gleich ist, so gibt es wieder nur ein Dreyeck, und dieses ist rechtwinklig. Ist aber die kleinere Seite kleiner als dieses Perpendikel; so ist die Auflösung unmöglich, oder es gibt gar kein Dreyeck, das die verlangten Stücke enthält.

a. Aufg. Aus zweyen gegebenen Seiten und einem gegebenen Winkel ein Parallelogramm zu verfertigen.

Art. 87. Aufg. In einem gegebenen Punkt einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten (§. 62. f.)

Aufl. (Fig. 96). MN sey die gegebene gerade Linie, A der gegebene Punkt auf derselben. Man schneide auf MN auf beyden Seiten von A zwey beliebige unter einander gleiche Stücke AB und AC ab, beschreibe über BC als Grundlinie

ein gleichschenkliges △ BCD, dessen gleiche Seiten BD und CD von beliebiger Größe sind (§. 62. c.), und ziehe AD; so ist AD das verlangte Perpendikel.

Bew. A ist die Mitte der Grundlinie, und D die Spitze des gleichschenkligen △ BCD; also steht (nach §. 44) AD senkrecht auf BC oder MN.

Anm. 1. Die Linien BD und CD brauchen in der Anwendung nicht wirklich gezogen zu werden. Sie dienen nur zu dem Beweise.

Art. 88. Aufg. Wie Art. 87.

Aufl. (Fig. 22). AB sey die gegebene gerade Linie, A der gegebene Punkt auf derselben. Man nehme außerhalb AB einen beliebigen Punkt D an und ziehe AD. Hierauf trage man von D aus zur AB die DB = DA, verlängere BD über D hinaus nach C, mache DC = DB und ziehe AC; so ist AC das verlangte Perpendikel.

Bew. Da DC = DB und DB = AD, so ist auch DC = AD; die beyden Dreyecke ABD und ACD sind also gleichschenklig, und zwar sind AB und AC ihre Grundlinien. Daher ist (§. 43)

W. DAB = DBA

und

W. DAC = DCA

also

W. DAB + DAC = DBA + DCA

oder

W. BAC = DBA + DCA

Nun ist aber

W. BAC + DBA + DCA = 2 R. (§. 28)

also W. BAC = der Hälfte von 2 rechten W. = 1 R.

Folglich ist CA senkrecht auf AB.

Anm. Gewöhnlich wird diese Auflösung mit Voraussetzung der Lehre vom Kreise vorgetragen. Nachdem man nämlich einen beliebigen Punkt D angenommen und AD ge-

zogen hat, beschreibt man aus D als Mittelpunkt mit AD als Halbmesser einen Kreis; u. s. w.

a. Aufg. Ueber einer gegebenen geraden Linie ein Quadrat zu beschreiben.

b. Aufg. Ein Rechteck zu beschreiben, dessen zwey an einander liegende Seiten gegeben sind.

c. Aufg. Ueber einer gegebenen geraden Linie einen Rhombus von gegebenem Winkel zu verfertigen.

d. Aufg. Einen Rhomboides zu beschreiben, dessen zwey an einander liegende Seiten und eingeschlossener Winkel gegeben sind.

Anm. Ein practisches Verfahren, geometrisch ein beliebiges Parallelogramm zu beschreiben, besteht darin, daß man zwey gerade Linien zieht, die sich durchschneiden, auf jeder derselben, vom Durchschnittspunkt aus, zwey unter sich gleiche Stücke abschneidet, u. s. w.

Art. 89. Aufg. Von einem gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen geraden Linie ein Perpendikel auf dieselbe zu fällen (§. 62. g.).

Aufl. (Fig. 97). A sey der außerhalb MN gegebene Punkt. Man nehme auf MN einen beliebigen Punkt B an, und ziehe AB. Hierauf trage man von A aus zur MN die AC = AB; beschreibe über BC als Grundlinie ein gleichschenkliges △ BCD, dessen beyde gleichen Seiten von beliebiger Länge sind, und ziehe AD, welche die MN in E durchschneide; so ist AE oder AD das verlangte Perpendikel.

Bew. Da AC = AB ist, so ist BCA ein gleichschenkliges Dreyeck, BC seine Grundlinie. Auf derselben Grundlinie ist noch ein gleichschenkliges △BCD beschrieben. Die Linie AD verbindet nun die Spitzen zweyer gleichschenkligen Dreyecke, die auf derselben Grundlinie stehen, geht folglich (§. 48) senkrecht durch die gemeinschaftliche Grundlinie BC. Demnach ist AE ein Perpendikel auf MN.

Anm. 1. Hätte man den Punkt B auf der MN so gewählt, daß man keine zweyte gerade Linie AC hätte construiren

können, die der AB gleich und doch mit ihr nicht zusammen fallend gewesen wäre; so war AB gleich selbst das Perpendikel. — Um diesen besonderen Fall zu vermeiden, nimmt Euklid auf der andern Seite von MN einen beliebigen Punkt h an, und beschreibt aus dem Mittelpunkt A mit dem Halbmesser Ah einen Kreis, der die MN in den beyden Punkten B und C durchschneidet.

Anm. 2. Obige Aufgabe ist in Euklid I der Satz 12. Da in Satz 10 die Aufgabe, eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen, vorher geht; so theilt er die BC in zwey gleiche Theile, u. s. w.

Anm. 3. Wie man sich in der praktischen Anwendung dieser Aufgabe zu benehmen hat, leuchtet von selbst ein. Die Linien AB, AC, BD und DC brauchen dann nicht gezogen zu werden.

Anm. 4. Man kann auch auf MN (Fig. 98) zwey beliebige Punkte B und C annehmen, und von B aus mit dem Halbmesser AB den Bogen AhD und von C aus mit dem Halbmesser CA den Bogen AKD beschreiben, und den anderen Durchschnittspunkt D beyder Bögen mit dem Punkt A durch die gerade Linie AD verbinden; so geht AD senkrecht durch MN. Der Beweis gründet sich ebenfalls auf §. 48; nur sind jetzt B und C die Spitzen, und AD ist die gemeinschaftliche Grundlinie der beyden gleichschenkligen Dreyecke ADB und ADC; folglich geht BC senkrecht durch AD. (Vgl. Clavius p. 37).

Anm. 5. Proklus schreibt die Erfindung dieser Aufgabe dem Oenopides zu (Procl. Herv. p. 162).

Art. 90. Aufg. Wie Art. 89.

Aufl. (Fig. 22). AB sey die gegebene gerade Linie, C der gegebene Punkt außerhalb derselben. Man ziehe eine beliebige gerade Linie CB von C nach AB, halbire dieselbe in D (nach §. 62. h.), trage von D aus zur BA die DA = DB, und ziehe AC; so ist AC das verlangte Perpendikel.

Bew. Wie Art. 88.

Anm. Diese Auflösung sollte eigentlich erst nach §. 62. h stehen. Ohne §. 62. h anzuwenden, könnte man auf einer geraden Linie zwey unter einander gleiche Stücke CD = DB von beliebiger Größe abschneiden, hierauf die so bestimmte CB von C aus zur AB tragen, u. s. w. Nur müßte CB > CA seyn, was sich, wenn man will, ebenfalls durch eine geometrische Construction bewerkstelligen läßt.

Art. 91. Aufg. Eine gegebene gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen (§. 62. h).

Aufl. (Fig. 8). AB sey die gegebene gerade Linie, man beschreibe über derselben als Grundlinie zwey gleichschenklige Dreyecke ABC und ABE, und verbinde die Spitzen C und E derselben durch die gerade Linie CE; so ist die gerade Linie AB in dem Punkt D, in welchem sie von der BE geschnitten wird, halbirt.

Bew. Da die gerade Linie CE die Spitzen zweyer gleichschenkligen Dreyecke ABC und ABE, die auf derselben Grundlinie AB stehen, verbindet; so geht sie (nach §. 48) mitten durch AB.

Anm. 1. Obige Aufgabe wird in Euklid im 10ten Satze des I. Buches aufgelöst. Euklid gründet die Auflösung auf den vorhergehenden 9ten Satz, „Einen gegebenen Winkel zu halbiren." Er beschreibt nämlich über AB das gleichseitige △ ABC und halbirt den W. ACB an der Spitze. — Nach Proklus (Procl. Barocii p. 159) löst Apollonius von Pergä die Aufgabe dadurch auf, daß er mit dem Halbmesser AB aus den Mittelpunkten A und B zwey Kreise beschreibt, die sich in den Punkten C und E durchschneiden, und hierauf die gerade Linie CE zieht.

Anm. 2. Obige Aufgabe konnte auch so ausgedrückt werden: Durch die Mitte einer geraden Linie ein Perpendikel zu ziehen.

Anm. 3. Wenn in der Anwendung dieser Aufgabe nur die Mitte einer geraden Linie AB (Fig. 99) gesucht wird, so kann man mit einem Halbmesser Aq, der nur wenig größer

als die Hälfte von AB ist, von A und B aus zwey Kreisbögen beschreiben, die sich in m und n durchschneiden, und dann die gerade Linie mn ziehen. — Oder man kann auch, mit Hinzuziehung des Augenmaßes, zwey Punkte p und q bestimmen, die gleich weit von A und B, und von einander sehr wenig, entfernt sind. Die Mitte von pq läßt sich dann, nach dem Augenmaß, sehr leicht mit großer Genauigkeit finden.

Anm. 4. Auch lassen sich nun folgende Aufgaben leicht auflösen: „Eine gegebene gerade Linie in 2 × 2 oder 4, in 2 × 4 oder 8 u. s. w. gleiche Theile zu theilen.

Anm. 5. Wenn man die beyden gleichschenkligen Dreyecke ABC und ABE (Fig. 8) nicht congruent macht, so kann man beyde auf derselben Seite von AB construiren (s. Lehrb. §. 48). Dann muß man die gerade Linie CE verlängern, bis sie die AB in D trifft.

Art. 92. Aufg. Einen gegebenen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen (§. 62. i).

Aufl. (Fig. 100). BAC sey der gegebene Winkel. Man schneide auf seinen Schenkeln (mit beliebiger Oeffnung des Zirkels) AD = AE ab, denke sich die gerade Linie DE gezogen, beschreibe darauf als Grundlinie ein gleichschenkliges △ DEF (dessen beyde gleichen Seiten von beliebiger Länge) (§. 62. c), und ziehe AF; so ist der W. BAC durch AF in zwey gleiche Theile getheilt.

Bew. Es ist AD = AE, DF = EF und AF = AF, also △ ADF ≌ AEF; mithin W. BAF = CAF.

Anm. 1. Euklid, der in dem ersten Satze des ersten Buches über einer gegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck, dagegen noch kein gleichschenkliges, zu beschreiben gelehrt hat, beschreibt über DE ein gleichseitiges Dreyeck. Da beweist nun Proklus (Procl. Barocii p. 156) sehr umständlich, daß die Spitze F desselben zwischen die Schenkel AB und AC fallen müsse. Offenbar ist dieses ganz überflüssig, da sich weder die Auflösung noch der Beweis um die Lage des Punktes F weiter bekümmern. Daraus, daß bewiesen wird, der

W. BAF sey = CAF, folgt dann von selbst, daß die Linie AF nicht außerhalb des W. BAC fallen könne, weil sonst der eine jener beyden ein Theil des andern, also beyde einander nicht gleich wären.

Anm. 2. Bey der Anwendung dieser Aufgabe hat man nicht nöthig, die Linien DF und EF wirklich zu ziehen. Sie werden nur des Beweises wegen gezogen.

Anm. 3. Wenn man einen Winkel in zwey gleiche Theile theilen kann, so kann man ihn auch in 2 × 2 oder 4, in 2 × 4 oder 8 u. s. w. gleiche Theile theilen.

a. Aufg. Einen Winkel von 60° (od. $\frac{2}{3}$ R.) geometrisch zu verzeichnen.

b. Aufg. Einen Winkel von 45° (od. $\frac{1}{2}$ R.) geometrisch zu verzeichnen.

c. Aufg. Einen Winkel von 30° (od. $\frac{1}{3}$ R.) geometrisch zu verzeichnen.

d. Aufg. Einen Winkel von 15° (od. $\frac{1}{6}$ R.) geometrisch zu verzeichnen.

e. Aufg. Einen Winkel von 75° (od. $\frac{5}{6}$ R.) geometrisch zu verzeichnen.

Anm. Aehnliche Aufgaben, darunter auch die Verzeichnung einiger stumpfen Winkel, z. B. von 120°, 135° u. s. w.

f. Aufg. Ein reguläres Sechseck von gegebener Seite (nämlich ohne Voraussetzung des Satzes §. 132) zu construiren.

g. Aufg. Ein reguläres Achteck von gegebener Seite zu construiren.

h. Aufg. Von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu verzeichnen, so daß eine Seite in die gegebene Linie und eine Ecke in den gegebenen Punkt fällt.

Nach §. 62.

Art. 93. Aufg. Von einem gegebenen Punkte außerhalb einer gegebenen geraden Linie eine gerade Linie nach derselben zu ziehen, die mit ihr einen gegebenen Winkel mache.

Aufl. (Fig. 101). Es sey aus dem Punkt A nach der geraden Linie MN eine gerade Linie AF so zu ziehen, daß der W. AFN = dem gegebenen Winkel B werde.

Man nehme auf MN einen beliebigen Punkt C an, trage daran den Winkel DCN = B; ziehe aus A eine beliebige gerade Linie AE nach CD und mache Winkel EAF = AED; so ist W. AFN der verlangte Winkel.

Bew. Da W. EAF = AED ist, so ist AF ‖ DC (§. 19), also W. AFN = DCN = dem gegebenen Winkel B.

Anm. Man kann die Aufgabe auch dadurch auflösen, daß man aus A ein Perpendikel auf MN fällt, und an dieses Perpendikel die AF unter einem Winkel legt, welcher den gegebenen Winkel B zu einem rechten ergänzt.

Art. 94. Aufg. Zwischen zweyen der Lage nach gegebenen geraden Linien, die sich schneiden, eine gerade Linie von gegebener Größe einzutragen, die mit der einen jener beyden Linien einen gegebenen Winkel mache.

Aufl. (Fig. 102). AC und AB seyen die beyden der Lage nach gegebenen Linien, die sich in A schneiden; es soll die der Größe nach gegebene gerade Linie D zwischen beyden so eingetragen werden, daß sie mit AC den gegebenen Winkel E mache.

Man mache den W. FAC = E, verlängere AF über A hinaus nach G, mache AG = D, und ziehe GB ‖ AC bis sie die AB in B trifft. Endlich ziehe man BC ‖ GA, so ist die Aufgabe gelöst.

Bew. Es ist AGBC ein Parallelogramm (§. 25), also BC = AG = D (§. 56); und W. BCA ist = CAF (§. 17) = E.

(Clavius p. 60, nach Peletarius).

Art. 95. Aufg. Es seyen eine gerade Linie und außerhalb derselben zwey Punkte gegeben; man soll, von diesen beyden Punkten aus, nach demselben Punkte der gegebenen Linie zwey gerade Linien so ziehen, daß sie mit derselben gleiche Winkel machen.

Aufl. (Fig. 13). Es seyen MN die gegebene gerade Linie, und A und B die beyden Punkte außerhalb derselben. Man fälle aus B ein Perpendikel BC auf MN, verlängere es, und mache CD = BC. Zieht man hierauf DA, welche die MN in E durchschneidet; so ist E der gesuchte Punkt.

Bew. Man ziehe noch EB, so ist CE = CE, CB = CD und W. ECB = ECD, also △ ECB ≌ ECD; daher W. BEC = DEC. Es ist aber auch W. AEN = DEC (als Scheitelwinkel). Folglich ist W. AEN = BEC.

Anm. Diese Aufgabe entspricht dem Lehrsatze Art. 6. Streng genommen, ist erst jetzt bewiesen, daß es auf einer geraden Linie jedesmal wirklich einen Punkt gibt, von welchem aus zwey andere gerade Linien, nach zweyen gegebenen Punkten außerhalb der ersten Linie gezogen, mit dieser gleiche Winkel machen.

Art. 96. Aufg. Es seyen eine gerade Linie und außerhalb derselben zwey Punkte gegeben; man soll, von diesen beyden Punkten aus, nach demselben Punkte der gegebenen Linie zwey gerade Linien so ziehen, daß ihre Summe so klein wie möglich werde.

Aufl. (Fig. 13). MN sey die gegebene gerade Linie, A und B seyen die gegebenen Punkte außerhalb derselben. Man fälle aus B das Perpendikel BC auf MN, nehme auf der Verlängerung desselben CD = CB, ziehe AD, welche die MN in E durchschneidet, und ziehe EB, so sind AE und EB die gesuchten Linien.

Bew. Es ist EC = EC, CB = CD und W. ECB = ECD, also △ ECB ≌ ECD, daher EB = ED, also

$$BE + EA = ED + EA = DA.$$

Es sey F irgend ein anderer Punkt auf MN, so ist zu beweisen, daß $BF + FA > BE + EA$ sey.

Man ziehe noch DF, so ist CF = CF, CD = CB und W. DCF = BCF (Constr.), also △ DCF ≌ BCF, daher DF = BF, also

$$BF + FA = DF + FA$$

In dem △ ADF ist nun

$$DF + FA > DA$$

Folglich ist auch

$$BF + FA > BE + EA.$$

(Vgl. Art. 43).

Art. 97. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines gegebenen Winkels eine gerade Linie zu ziehen, welche mit den Schenkeln des gegebenen Winkels gleiche Winkel mache.

Aufl. (Fig. 103). A sey der gegebene Punkt, innerhalb des gegebenen Winkels CBD. Man verlängere den einen Schenkel BD über B hinaus nach E, halbire den W. EBC durch die gerade Linie BF (§. 62. i), und ziehe durch A der BF die Linie GH parallel, welche die BD in G und die BC in H durchschneidet; so ist diese die gesuchte Linie.

Bew. Es ist

W. BHG = HBF (§. 17)

und

W. BGH = EBF (§. 16)

also ist auch, da, nach der Construction, der W. HBF = EBF ist,

W. BHG = W. BGH.

(Grüson S. 5).

Anm. In John Leslie's geometrischer Analysis, übers. v. Grüson, steht S. 5 die Aufgabe also: „Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die mit zwey der Lage nach gegebenen geraden Linien gleiche Winkel macht." So gestellt, läßt die Aufgabe zwey Auflösungen zu, da die beyden sich durchschneidenden Linien ED und BC bloß der Lage nach gegeben, also von unbegränzter Länge sind. Denkt man sich nämlich die CB noch über B hinaus nach x verlängert, so liegt der Punkt A außerhalb des Winkels DBx, und eine zweyte durch A gezogene gerade Linie kann die Schenkel BD und Bx des Winkels DBx so durchschneiden, daß sie mit beyden Schenkeln gleiche Winkel macht, auf ähnliche Art

wie eine durch den außerhalb des W. CBD gelegenen Punkt A′ gezogene gerade Linie A′G die Schenkel BC und BD unter gleichen Winkeln durchschneidet. Diese Zeichnung für den Punkt A′ findet sich auch in der Grnson'schen Figur; aber die doppelte Auflösung für denselben Punkt A ist daselbst nicht bemerkt.

Art. 98. Aufg. Wie Art. 97.

Aufl. (Fig. 104). A sey der gegebene Punkt innerhalb des gegebenen Winkels CBD. Man halbire den W. CBD durch die gerade Linie BE (§. 62. i), fälle darauf aus A das Perpendikel AF (§. 62. g) und verlängere das Perpendikel AF auf beyden Seiten, bis es die Schenkel des gegebenen Winkels in G und H trifft; so ist GH die gesuchte Linie.

Bew. Da W. BFH = BFG (als rechte Winkel) und W. HBF = GBF (nach der Constr.), also in den Dreyecken BFH und BFG zwey Winkel des einen gleich zweyen Winkeln des andern; so ist auch der dritte Winkel BHF des einen dem dritten Winkel BGF des andern gleich (§. 31). Folglich macht die durch A gezogene gerade Linie GH mit den beyden Schenkeln des gegebenen Winkels gleiche Winkel.

Art. 99. Aufg. Wie Art. 97.

Aufl. (Fig. 104). A sey der gegebene Punkt innerhalb des gegebenen Winkels CBD. Man nehme auf dem einen Schenkel BD einen Punkt M beliebig an, mache auf dem andern Schenkel BC die BN = BM, ziehe MN und durch A die HG ll MN; so ist HG die gesuchte Linie.

Bew. Da BM = BN ist, so ist

W. BNM = BMN (§. 43).

Nun ist

W. BHG = BNM

und ⎫ §. 16. ⎬

W. BGH = BMN

also ist auch

W. BHG = BGH.

Art. 100. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß wenn man auf dieselbe aus

zweyen andern gegebenen Punkten Perpendikel fällt, die zwischen jenem Punkte und den beyden Perpendikeln enthaltenen Abschnitte unter einander gleich seyen.

Aufl. (Fig. 105). C sey der gegebene Punkt, durch welchen eine gerade Linie gezogen, und A und B die beyden andern gegebenen Punkte, aus welchen Perpendikel auf die gezogene Linie gefällt werden sollen.

Man ziehe AC, verlängere sie über C hinaus, und nehme auf der Verlängerung CD = AC. Dann ziehe man DB und fälle aus C auf DB das Perpendikel CE, so ist dieses die verlangte Linie, und es sind, wenn man noch auf die über C hinaus gehende Verlängerung von CE das Perpendikel AF fällt, die beyden Abschnitte CE und CF einander gleich.

Bew. Da CD = CA, W. DEC = AFC (als rechte Winkel) und W. ACF = DCE (als Scheitelwinkel) ist, so ist △ DCE ≌ ACF, also CE = CF.

(Grüson S. 6).

Art. 101. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß die aus zweyen andern gegebenen Punkten darauf gefällten Perpendikel einander gleich sind.

Erste Aufl. (Fig. 106). C sey der erste, und A und B die beyden andern gegebenen Punkte.

Man ziehe AB, halbire dieselbe in D, und ziehe CD; so ist diese die verlangte Linie, und es sind, wenn man auf dieselbe oder deren Verlängerung die Perpendikel AE und BF fällt, diese unter einander gleich.

Bew. Da AD = BD, W. ADE = BDF (§. 14) und W. AED = BFD ist; so ist △ ADE ≌ BDF, also AE = BF.

Zweyte Aufl. (Fig. 106). C sey der erste, und A und B die beyden andern gegebenen Punkte.

Man ziehe AB, und mit derselben durch C die GH parallel; so ist diese die verlangte Linie, und es sind, wenn man auf dieselbe die Perpendikel AG und BH fällt, diese unter einander gleich.

Bew. Da W. AGH + BHG = 2 R., so ist AG ll BH (§. 19), also, da auch GH ll AB ist, das Viereck ABHG ein Parallelogramm (§. 25); folglich AG = BH (§. 56).

Construction von Dreyecken, bey gegebener Summe oder Differenz von Seiten oder Winkeln. Art. 102 bis 108.

Art. 102. Aufg. Eine Seite eines Dreyecks, ein Winkel an derselben, und die Differenz der beyden andern Seiten ist gegeben: man soll das Dreyeck verzeichnen.

Aufl. (Fig. 107 und 108). AB sey die gegebene Seite, BAC der gegebene Winkel und AD die gegebene Differenz der beyden andern Seiten AC und BC.

Man trage an die gegebene Seite AB den gegebenen W. BAC, nehme, wenn AC > BC ist, auf dem Schenkel AC (Fig. 107), und, wenn AC < BC ist, auf der über den Scheitelpunkt A hinaus gehenden Verlängerung des Schenkels AC (Fig. 108) die Linie AD = der gegebenen Differenz, und ziehe BD. Hierauf mache man W. DBC = BDC, so ist △ ABC das verlangte Dreyeck.

Bew. Das △ ABC hat die gegebene Seite AB, und den gegebenen Winkel A. Da ferner W. DBC = BDC ist, so ist das △ BDC gleichschenklig, also

BC = DC

Daher ist auch

AD (Fig. 107) = AC — DC = AC — BC

und

AD (Fig. 108) = CD — AC = BC — AC

also ist in beyden Fällen AD dem Unterschiede der beyden Seiten AC und BC gleich.

(Meyer Hirsch I, p. 105; Schwab, Aufg. 3).

Art. 103. Aufg. Eine Seite eines Dreyecks, ein Winkel an derselben, und die Summe der beyden andern Seiten gegeben: man soll das △ verzeichnen.

Aufl. (Fig. 109). AB sey die gegebene Seite, A der gegebene Winkel und AD die gegebene Summe der beyden andern Seiten AC und BC.

Man trage an die gegebene Seite AB den gegebenen Winkel A, nehme AD = der gegebenen Summe der beyden andern Seiten, und ziehe BD.

Hierauf mache man den W. DBC = D. Sein Schenkel BC treffe die AD in C; so ist ABC das gesuchte Dreyeck.

Bew. Das △ ABC hat die gegebene Seite AB und den gegebenen W. A.

Da ferner W. DBC = BDC ist, so ist das △ BDC gleichschenklig, also

$$BC = CD$$

also auch

$$AC + BC = AC + CD =$$ der gegebenen Summe AD.

Anm. Da in einem Dreyeck die Summe zweyer Seiten immer größer als die dritte seyn muß (§. 53), so ist die Auflösung unmöglich, wenn AD nicht > AB ist. Da nun, wenn die Auflösung möglich seyn soll, im △ ABD die Seite AD immer > AB ist, so ist auch W. ABD > W. D (§. 51), also auch W. ABD > CBD. Der Schenkel BC trifft also die AD zwischen A und D.

Art. 104. Aufg. Die Grundlinie eines Dreyecks, die Summe der beyden andern Seiten und der Winkel an der Spitze sind gegeben: man soll das Dreyeck verzeichnen.

Aufl. (Fig. 110). AB sey die gegebene Grundlinie, ACB der gegebene Winkel an der Spitze, und AD die gegebene Summe der beyden Seiten AC und BC.

Man trage an die gegebene Linie AD den W. D = der Hälfte des gegebenen Winkels ACB, und mache von A aus die AB = der gegebenen Grundlinie, so daß ihr Endpunkt B auf den Schenkel DB des Winkels D fällt. Dann mache man W. DBC = D; so ist ABC das verlangte Dreyeck.

Bew. Da W. CBD = D ist, so ist das △ BCD gleichschenklig, also

$$BC = CD$$

also auch

$$AC + BC = AC + CD = \text{der gegebenen}$$

Summe AD.

Ferner ist W. ACB = CBD + D = 2. D = dem gegebenen Winkel an der Spitze.

Endlich hat AB die gegebene Größe.

(Meyer Hirsch I. p. 107; Schwab, Aufg. 2).

Anm. 1. Die Auflösung ist nur dann möglich, wenn AD > AB (vgl. Anm. zu Art. 103), und zugleich AB nicht kleiner als das Perpendikel von A auf DB ist.

Wenn AB > das Perpendikel von A auf DB ist, so gibt es auf DB außer dem Punkt B jedesmal noch einen zweyten Punkt E, für welchen AE = der gegebenen Grundlinie AB ist (siehe oben S. 164). Es läßt sich dann eben so W. FED = W. D machen; folglich ist AFE ein zweytes Dreyeck, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Es drängt sich uns nun sogleich die Frage auf, ob das △ AFE ein von dem △ ABC verschiedenes Dreyeck sey oder nicht.

Da AE = AB ist, so ist △ AEB gleichschenklig, also

$$W.\ AEB = W.\ ABE$$

Ferner ist

$$W.\ ADE = W.\ CBD$$

Nun ist

$$W.\ AEB + ADE + DAE = 2\ R.\ (\S.\ 28)$$

und

$$W.\ ABE + CBD + ABC = 2\ R.\ (\S.\ 11)$$

also

$$W.\ AEB + ADE + DAE = ABE + CBD + ABC$$

folglich W. DAE oder

$$W.\ FAE = ABC$$

Ferner ist

W AFE = BCA (denn jeder ist = 2. D)

und

AE = AB

mithin (§. 40)

△ AEF ≅ BAC.

Die beyden gefundenen Dreyecke AEF und BAC sind also gar nicht von einander verschieden.

Anm. 2. Ein besonderer hierher gehöriger Fall ist folgende Aufgabe: „Wenn die Hypotenuse und die Summe der beyden Katheten eines rechtwinkligen Dreyecks gegeben sind, das Dreyeck zu verzeichnen.“ Die Hypotenuse ist in diesem Fall die gegebene Grundlinie, und der gegebene Winkel an der Spitze ist ein rechter. (Rosey und Grabowski S. 21).

Art. 105. Aufg. Die Grundlinie eines Dreyecks, die Differenz der beyden andern Seiten und der Winkel an der Spitze sind gegeben: man soll das Dreyeck verzeichnen.

Aufl. (Fig. 111). AB sey die gegebene Grundlinie, C der gegebene Winkel an der Spitze, nnd AD die gegebene Differenz der beyden Seiten AC und BC.

Man mache einen W. c = dem gegebenen Winkel C, nehme cD beliebig, mache cb = cD, und ziehe Db. Hierauf verlängere man cD über D hinaus, nehme DA = der gegebenen Differenz, und mache, von A aus, AB = der gegebenen Grundlinie, so daß der Endpunkt B auf Db oder deren Verlängerung fällt. Durch B endlich ziehe man BC ll bc, bis sie die Dc oder deren über c hinaus gehende Verlängerung in C trifft; so ist ABC das verlangte Dreyeck.

Bew. Da cb = cd ist, so ist △ bDc gleichschenklig, also W. cbD = cDb.

Nun ist W. CBD = cbD (§. 16), also auch W. CBD = cDb; mithin ist △ CBD gleichschenklig; also

CB = CD

daher

CA — CB = CA — CD = DA = der gegebenen Differenz der beyden Seiten CA und CB.

Ferner ist

W. BCA = bcD = dem gegebenen Winkel an der Spitze.

Endlich hat das △ ABC die gegebene Grundlinie AB.

Art. 106. Aufg. Wie Art. 105.

Aufl. (Fig. 111). — — —

Man verlängere die gegebene Differenz AD nach C, und trage daran in D einen Winkel BDC = der Hälfte von dem Nebenwinkel nCm des gegebenen Winkels C. Von A aus schneide man AB = der gegebenen Grundlinie AB auf dem Schenkel DB ab, und trage an BD in B den W. DBC = BDC; so ist ABC das verlangte Dreyeck.

Bew. Da W. DBC = BDC ist (Constr.), so ist △ BDC gleichschenklig, also BC = DC (§. 49), also AC — BC = AC — DC = AD; die beyden Seiten AC und BC haben also die gegebene Differenz.

Ferner ist W. BCD = 2 R. — (CDB + CBD). Es ist aber CBD = CDB (nach der Constr.); also W. BCD = 2 R. — 2. CDB.

Nun ist aber wieder CDB = $\frac{1}{2}$ mCn (Constr.) also 2. CDB = mCn.

Folglich ist W. BCD = 2 R. — mCn; d. h. BCD ist dem Nebenwinkel von mCn, also dem gegebenen Winkel C gleich.

Anm. Ein besonderer hierher gehöriger Fall ist die Aufgabe: „Wenn die Hypotenuse und die Differenz der beyden Katheten eines rechtwinkligen Dreyecks gegeben sind, das Dreyeck zu verzeichnen." Vgl. Anm. zu Art. 104. Der Nebenwinkel von C ist in diesem Falle ein rechter Winkel; man hat also an die gegebene Differenz der beyden Katheten nur einen halben rechten Winkel zu legen. (Rosey und Grabowski S. 22).

Art. 107. Aufg. Die Grundlinie eines Dreyecks, die Differenz der beyden Winkel an derselben, und die Differenz der beyden andern Seiten sind gegeben: man soll das Dreyeck verzeichnen.

Aufl. (Fig. 112). AB sey die gegebene Grundlinie. Man trage daran den W. ABD = der Hälfte der gegebenen Differenz der beyden Winkel ABC und BAC, und nehme, von A aus, AD = der gegebenen Differenz der beyden Seiten AC und BC so, daß der Endpunkt D auf den Schenkel BD des W. ABD fällt.

Hierauf verlängere man AD über D hinaus nach C, mache W. DBC = BDC und verlängere die Schenkel BC und DC beyder Winkel, bis sie sich in C treffen: so ist ABC das verlangte Dreyeck.

Bew. Da W. CBD = CDB ist, so ist das △ BDC gleichschenklig, also

$$BC = DC$$

also auch

$$AC - BC = AC - DC = AD =$$ der gegebenen Differenz der Seiten.

Ferner ist

$$W.\ ABD = W.\ CDB - CAB$$
$$= W.\ CBD - CAB$$

also

$$W.\ ABD + ABD = W.\ CBD + ABD - CAB$$

oder

$$2 \times ABD = CBA - CAB.$$

Da nun ABD die halbe Differenz der beyden W. CBA und CAB ist, so ist 2 × ABD diese Differenz selbst. Die beyden W. CBA und CAB haben also die gegebene Differenz.

Endlich ist AB = AB.

(Meyer Hirsch I. S. 109; Schwab, Aufg. 4).

Anm. Die Auflösung wird unmöglich, wenn AD kleiner als das Perpendikel von A auf den Schenkel BD des W. ABD ist. Wenn AD größer als dieses Perpendikel ist, so gibt es

(nach oben S. 164) auf BD außer dem Punkt D noch einen Punkt E, für welchen AE = AD ist. Wenn man nun AE über E hinaus nach G verlängert, so wird BEG ein stumpfer Winkel; derselbe kann also nicht Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks seyn. Wenn man aber BE nach F verlängert, und, von A aus, AF gleich der gegebenen Grundlinie des gesuchten Dreyecks nimmt, so daß der Endpunkt F auf BF fällt, dann den W. EFG = GEF nimmt; so hat das Dreyeck AFG ebenfalls die verlangten Eigenschaften. Es ist leicht zu beweisen, daß es mit dem △ ABD congruent ist.

Wäre AD dem Perpendikel von A auf BD gleich, so wäre W. BDC ein rechter, also liefe BC, wenn man W. DBC = BDC macht, der DC oder AC parallel. In diesem Falle ist also die Forderung, ein Dreyeck zu verzeichnen, ebenfalls unmöglich zu erfüllen.

Art. 108. Aufg. Die Grundlinie eines Dreyecks, die Differenz der beyden Winkel an derselben, und der Winkel an der Spitze sind gegeben: man soll das Dreyeck verzeichnen.

Aufl. (Fig. 113). Man mache einen W. bcd = dem gegebenen Winkel an der Spitze, nehme auf dem Schenkel cb einen beliebigen Punkt b an, mache cd = cb, und ziehe bd.

An bd trage man einen Winkel dbA = der Hälfte der gegebenen Differenz der beyden Winkel an der Grundlinie des Dreyecks. Der Schenkel bA treffe die über d hinaus gehende Verlängerung von cd in A. Dann mache man auf Ab, die man, wenn es nöthig ist, über b hinaus verlängere, von A aus, AB = der gegebenen Grundlinie, und ziehe BC ∥ bc bis sie die dc oder deren Verlängerung in C trifft: so ist ABC das verlangte Dreyeck.

Bew. Man ziehe BD ∥ bd, so ist W. CBD = cbd und W. CDB = cdb. Da nun cd = cb ist, so ist cbd ein gleichschenkliges Dreyeck, also W. cbd = cdb. Mithin ist auch

W. CBD = CDB

Nun ist

$$\text{W. } ABD = \text{W. } CDB - CAB = CBD - CAB$$

also

$$\text{W. } ABD + ABD = \text{W. } CBD + ABD - CAB$$

oder

$$2 \times ABD = CBA - CAB.$$

Da aber BD ll bd ist, so ist auch W. ABD = W. Abd; mithin ist auch

$$2 \times Abd = CBA - CAB.$$

Nun ist Abd die halbe Differenz der beyden W. CBA und CAB; also 2 × Abd ist diese Differenz selbst. Die beyden W. CBA und CAB haben also die gegebene Differenz.

Ferner hat die Grundlinie AB die gegebene Größe.

Endlich ist, da CB ll cb ist, W. C = W. bcd = dem gegebenen Winkel an der Spitze.

Anm. 1. In der Figur wurde der W. dbA unterhalb der Grundlinie bd des gleichschenkligen △ bdc angetragen. Er hätte eben so gut auch oberhalb dieser Grundlinie angetragen werden können.

Anm. 2. Da die Differenz zweyer Winkel und der dritte Winkel gegeben ist, so sind damit alle drey Winkel gegeben. Denn die Differenz und der dritte Winkel von 2 rechten abgezogen, der Rest durch 2 dividirt, gibt den zweyten Winkel. Dazu die Differenz addirt, gibt den ersten Winkel. Dann reducirt sich die Aufgabe auf die §. 62. e.

Art. 108. b. Aufg. Die Summe der Grundlinie und einer der beyden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreyecks, nebst dem Winkel an der Spitze, ist gegeben: man soll das Dreyeck verzeichnen.

Aufl. (Fig. 131). AD sey die gegebene Summe der Grundlinie und einer der beyden gleichen Seiten, A der gegebene Winkel an der Spitze.

Man verzeichne ein gleichschenkliges △ ADE, worin A der gegebene Winkel an der Spitze, und AD = AE = der gegebenen Summe ist. Hierauf halbire man den W. ADE an

der Grundlinie durch die gerade DC, welche die AE in C trifft, nnd ziehe CB ll ED; so ist ABC das verlangte gleichschenklige Dreyeck.

Bew. Da BC ll DE, so ist W. ACB = AED nnd W. ABC = ADE (§. 16); also, da W. AED = ADE (§. 13) ist, ist auch W. ACB = ABC. Folglich (§. 49) ist das △ ABC gleichschenklig; und zwar ist AB eine der beyden gleichen Seiten.

Ferner ist W. BCD = CDE (§. 17) und W. BDC = CDE (Constr.); also ist auch W. BCD = BDC. Folglich ist BC = BD. Also auch

$$AB + BC = AB + BD = AD$$

oder die Summe von einer der beyden gleichen Seiten und der Grundlinie ist der gegebenen AD gleich.

Endlich hat auch das △ ABC den gegebenen Winkel an der Spitze.

Anm. Diese Aufgabe ist ein besonderer Fall der allgemeineren Aufgabe: Wenn von einem Dreyeck die Summe der ersten und dritten, und die Summe der zweyten und dritten Seite, und der von der ersten und zweyten Seite eingeschlossene Winkel gegeben ist, das Dreyeck zu verzeichnen. Siehe Bd. II, nach §. 91.

a. Aufg. Die Summe der Grundlinie und seiner der beyden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreyecks, nebst dem Winkel an der Grundlinie, ist gegeben: man soll das Dreyeck verzeichnen.

Art. 108. c. Aufg. Die Differenz der Grundlinie und einer der beyden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreyecks, nebst dem Winkel an der Spitze, ist gegeben; man soll das Dreyeck verzeichnen.

Erster Fall. Wenn eine der beyden gleichen Seiten größer als die Grundlinie ist. Dieß ist nämlich der Fall, wenn der gegebene Winkel an der Spitze $< \frac{2}{3}$ R. ist.

Aufl. (Fig. 132). AD sey die gegebene Differenz von

einer der beyden gleichen Seiten und der Grundlinie, A der gegebene Winkel an der Spitze.

Man verzeichne ein gleichschenkliges △ ADE, worin A der gegebene Winkel an der Spitze, und AD = AE = der gegebenen Differenz ist. Hierauf verlängere man AD nach B, und halbire den W. EDB durch die gerade Linie DC, welche die Verlängerung von AE in C trifft, und ziehe CB ∥ ED; so ist ABC das verlangte Dreyeck.

Bew. Daß das △ ABC gleichschenklig ist, wird auf dieselbe Art wie in Art. 108. b. bewiesen.

Ferner ist W. DCB = EDC (§. 17). Es ist aber auch W. CDB = EDC (Constr.). Also ist W. DCB = CDB; daher DB = BC (§. 49).

Folglich ist

$$AB - BC = AB - DB = AD$$

oder eine der beyden gleichen Seiten und die Grundlinie haben die gegebene Differenz.

Zweyter Fall. Wenn die Grundlinie größer als eine der beyden gleichen Seiten ist. In diesem Falle ist der gegebene Winkel an der Spitze > $\frac{2}{3}$ R.

Aufl. (Fig. 133). Voraussetzung und Anfang der Construction wie im ersten Fall.

Da der W. DAE der größte Winkel im △ DAE ist, so ist auch DE dieses Dreyecks größte Seite (§. 51). Man schneide von DE ein Stück DF = DA ab, und ziehe AF. Ferner verlängere man FE über E hinaus nach G, und mache FG = AD. Durch G ziehe man GC ∥ AF, bis sie die Verlängerung von AE in C trifft; und durch C ziehe man CB ∥ ED, bis zur Verlängerung von AD in B: so ist ABC das verlangte gleichschenklige Dreyeck.

Bew. Daß das △ ABC gleichschenklig ist, wird auf dieselbe Art wie Art. 108. b. bewiesen.

Ferner verlängere man AF, bis sie die BC in H trifft, so ist W. AHB = AFD (§. 16) und W. HAB = AFD (§. 43); also W. AHB = HAB; mithin HB = AB.

Da GF ll CH und GC ll FH, so ist GCHF ein Parallelogramm, also CH = GF. Es ist aber GF = AD (Constr.); also CH = AD.

Folglich ist

$$BC - AB = BC - BH = CH = AD$$

oder die Grundlinie und eine der beyden gleichen Seiten haben die gegebene Differenz.

Anm. 1. Es gilt hier eine ähnliche Bemerkung wie zu Art. 108. b.

Anm. 2. Wenn die Grundlinie einer der beyden gleichen Seiten gleich ist, so ist die Differenz gleich Null, und jedes gleichseitige Dreyeck thut der Aufgabe Genüge.

a. Aufg. Die Differenz der Grundlinie und einer der beyden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreyecks, nebst dem Winkel an der Grundlinie, ist gegeben: man soll das Dreyeck verzeichnen.

Verzeichnung von Vier- und Fünfecken bey 5 und 7 Daten. Art. 109 bis 116.

Art. 109. Aufg. Aus drey Seiten und zwey einander gegen über stehenden Winkeln ein Viereck zu verzeichnen.

Aufl. (Fig. 33). Zu einem Viereck ABCD seyen die Seiten ab, bc, cd und die Winkel b und d gegeben.

Man construire ein Dreyeck abc aus zwey Seiten ab, bc und dem eingeschlossenen Winkel b (nach §. 62).

Hierauf zeichne man einen Winkel D = dem gegebenen d, mache dessen Schenkel DC = der gegebenen Seite dc, und aus C trage man CA = der durch Construction des △ abc gefundenen Linie ca, nach dem andern Schenkel DA des Winkels D. Endlich beschreibe man auf AC ein △ ACB, das dem △ abc congruent ist; so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Bew. Ueberflüssig.

(Langsdorf's Anfangsgründe S. 179).

Anm. 1. Da hier das △ ADC nur durch zwey Seiten und einen anliegenden Winkel, nämlich AC, DC und den W. D bestimmt ist, so gibt es, wenn AC < DC und W. CAD kein rechter ist, zweyerley Dreyecke ADC, welche die drey Bestimmungsstücke enthalten (oben S. 164). In diesem Falle gibt es also zweyerley Vierecke ABCD, welche der Aufgabe Genüge thun.

Anm. 2. Daß die genannten 5 Stücke des Vierecks so gegeben seyn können, daß die Auflösung der Aufgabe unmöglich wird, bedarf keiner Erinnerung (vgl. oben S. 164).

Art. 110. Aufg. Aus dreyen Seiten und den beyden Winkeln, welche an der unbekannten Seite liegen, ein Viereck zu verzeichnen.

Aufl. (Fig. 114). Zu einem Viereck ABCD seyen die Seiten ad, ab, bc und die Winkel d und c gegeben.

Man mache AD = ad, den W. D = d. Auf dessen Schenkel DE nehme man einen beliebigen Punkt c' an, trage daran den gegebenen W. c, mache c'b' = der gegebenen Seite cb, und ziehe durch b' eine gerade Linie b'm ll DE. Hierauf mache man AB = ab, indem man die ab von A aus auf die b'm trägt, und ziehe durch B die gerade BC ll b'c'; so ist ABCD das verlangte Viereck.

Bew. Da BC ll b'c' und Bb' ll Cc' ist, so ist BCc'b' ein Parallelogramm, also BC = b'c' = der gegebenen bc.

Ferner ist W. BCD = b'c'D = dem gegebenen W. c. Das Uebrige versteht sich von selbst.

(Langsdorf's Anfangsgründe, S. 180).

Art. 111. Aufg. Aus dreyen Winkeln und zwey einander gegen über liegenden Seiten ein Viereck zu verzeichnen.

Aufl. (Fig. 115). Zu dem Viereck ABCD seyen die Seiten ab, dc, und die Winkel a, d und c gegeben.

Man mache DC = dc, trage daran die Winkel D = d und C = c. Auf dem Schenkel DE nehme man einen beliebigen Punkt m an, trage daran den W. m = a, mache mp = ab, und ziehe durch p die Linie pq ll DE, welche

den Schenkel Cn des Winkels C in B durchschneidet. Durch B ziehe man BA ll pm, so ist ABCD das verlangte Viereck.

Bew. Da AB ll mp und pB ll Am ist, so ist AmpB ein Parallelogramm, also AB = mp = der gegebenen Linie ab.

Ferner ist W. DAB = m = dem gegebenen W. a.

Das Uebrige versteht sich von selbst.

(Langsdorf's Anfangsgründe S. 181).

Art. 112. Aufg. Aus dreyen Winkeln und zweyen Seiten, welche dem unbekannten Winkel anliegen, ein Viereck zu verzeichnen.

Aufl. Fig. 116). Zu dem Viereck ABCD seyen die Seiten ab, ad und die Winkel b, c und d gegeben.

Man mache EF = ab, den W. F = b, nehme auf dem Schenkel FC einen beliebigen Punkt C an, mache den W. C = c, nehme auf dem Schenkel CG einen beliebigen Punkt G an, mache W. G = d, mache GH = ad, ziehe durch H die HI ll GC, und durch E die EA ll FC, bis sie die HI in A durchschneidet. Endlich ziehe man AD ll HG und AB ll EF, so ist ABCD das verlangte Viereck.

Da AB ll EF und EA ll FB ist, so ist ABFE ein Parallelogramm, also AB = EF = ab.

Eben so ist ADGH ein Parallelogramm, also AD = GH = ad.

Ferner ist W. CDA = G = d, W. CBA = F = b, und W. C = c.

Art. 113. Aufg. Aus zweyen auf einander folgenden Winkeln, einer anliegenden Seite und den beyden Diagonalen ein Viereck zu verzeichnen.

Aufl. (Fig. 117). Zu dem Viereck ABCD seyen die Winkel a und d, die Seite dc und die beyden Diagonalen ac und db gegeben.

Man mache den Winkel FAE = a, nehme auf dem Schenkel AF einen beliebigen Punkt F an, mache den W. F = dem gegebenen W. d, nehme FG = dc, ziehe durch G die

GH ∥ FA, nehme, von A aus, AC = ac so daß der Endpunkt C auf GH falle, ziehe CD ∥ GF, nehme von D aus die DB = db, so daß der Endpunkt B auf AE falle, und ziehe CB: so ist ABCD das verlangte Viereck.

Bew. Da DC ∥ FG und DF ∥ CG ist, so ist DFGC ein Parallelogramm, also DC = FG = dc.

Ferner ist W. ADC = F = adc.

Das Uebrige versteht sich von selbst.

Anm. 1. Wie von den Dreyecken im Allgemeinen der Satz gilt, daß drey Data das Dreyeck vollkommen bestimmen, so gilt von den Vierecken im Allgemeinen der Satz, daß es durch fünf Data vollkommen bestimmt werde. So lassen sich sehr viele Aufgaben erdenken, welche sämmtlich verlangen, aus fünf gegebenen Stücken ein Viereck zu verzeichnen. Von dieser Art sind die Aufgaben von Art. 109 bis 113, welche nur sehr leichte Kunstgriffe zu ihrer Auflösung erfordern. Andere bedürfen gar keiner Kunstgriffe zur Auflösung, sondern ergeben sich sogleich aus der bekannten Verzeichnung der Dreyecke. Dagegen gehören andere zu den schwersten Problemen der Elementar-Geometrie.

Von jener Art sind z. B.

a) aus dreyen Seiten und zwey eingeschlossenen Winkeln ein Viereck zu verzeichnen.

b) aus zweyen Seiten, einem eingeschlossenen und zweyen anliegenden Winkeln.

c) aus vier Seiten und einem Winkel.

d) aus einer Seite, zweyen anliegenden Winkeln und den beyden Diagonalen.

e) aus einer Seite, einem anliegenden und dem darauf folgenden nicht anliegenden Winkel und den beyden Diagonalen.

f) aus zweyen gegen über liegenden Seiten, einer Diagonale und den beyden Winkeln, welche diese Diagonale mit den beyden gegebenen Seiten macht.

U. s. w.

Von dieser Art sind z. B.

a) Aus einer Seite, zweyen nicht anliegenden Winkeln und den beyden Diagonalen ein Viereck zu verzeichnen.

b) aus zweyen gegen über liegenden Winkeln, der Diagonale, welche durch die gegebenen Winkel geht, und zweyen gegen über liegenden Seiten.

c) Aus den beyden Diagonalen, dem Winkel, welchen sie einschließen, und zweyen gegen über liegenden Seiten.

d) Aus den beyden Diagonalen, dem Winkel, welchen sie einschließen, und zweyen auf einander folgenden Winkeln.

e) Aus der Summe zweyer Winkel und den vier Seiten.

U. s. w.

Anm. 2. Noch zahlreicher, als über die Vierecke, sind die Aufgaben, die sich über Verzeichnung der Fünfecke erdenken lassen. Zur Bestimmung eines Fünfecks werden im Allgemeinen sieben Data erfordert. Das Erdenken und Auflösen solcher Aufgaben, wenn dazu etwas mehr als die bloße Verzeichnung der Dreyecke voraus gesetzt wird, kann für den Anfänger vielen, und nicht zu schweren, Stoff zum Selbstfinden geometrischer Sätze geben. Als ein Beyspiel stehe hier folgende Aufgabe.

Art. 114. Aufg. Aus vier Seiten, zweyen an der unbekannten Seite anliegenden Winkeln, und einem Winkel, welcher auf diese zwey Winkel nicht folgt, ein Fünfeck zu verzeichnen.

Aufl. (Fig. 118). Zu dem Fünfeck ABCDE seyen die Seiten ab, bc, cd, de und die Winkel a, e und c gegeben.

Man verzeichne aus den beyden Seiten bc, cd und dem eingeschlossenen Winkel c ein Dreyeck bcd, und bestimme dadurch die Größe der Diagonale bd.

Nun mache man AB = ab, W. A = a, nehme auf dem Schenkel AF einen beliebigen Punkt F an, mache W. F = e, nehme FG = ed, ziehe GH ∥ FA, mache BD = der gefundenen Diagonale bd, so daß der Endpunkt D auf GH fällt, und ziehe DE ∥ GF. Hierauf beschreibe man über BD ein dem △ bdc congruentes △ BDC, indem man BC

= bc und DC = dc nimmt: so ist ABCDE das verlangte Fünfeck.

Bew. Da ED ∥ FG and DG ∥ EF ist, so ist EDGF ein Parallelogramm, also ED = FG = ed.

Ferner ist W. AED = F = e.

Da das △ BDC ≌ bdc ist, so ist auch W. C = c.

Das Uebrige versteht sich von selbst.

Art. 115. Aufg. Ein Viereck zu verzeichnen, wenn eine Seite, die Summe zweyer andern und die Winkel gegeben sind. [Art. 93].

Aufl. (Fig. 119). Von dem zu verzeichnenden Viereck ABCD seyen die Seite AB, die Summe der beyden Seiten AD und DC, und die Winkel A, B und C gegeben. Man nehme AB = der gegebenen Seite, trage daran die gegebenen Winkel A und B, nehme AE = der gegebenen Summe der beyden Seiten AD und DC, ziehe aus E auf den Schenkel BC des Winkels B eine gerade Linie EF, welche mit BC einen Winkel EFB = dem gegebenen W. C macht (Art. 93), nehme auf der Verlängerung von AE die EG = EF, und ziehe GF. Ferner ziehe man durch E die EC ∥ GF bis sie die BC in C trifft, und ziehe CD ∥ FE, bis sie die AE in D trifft; so ist ABCD das verlangte Viereck.

Bew. Da DC ∥ EF ist, so ist W. EDC = GEF (§. 16), und da EC ∥ GF ist, so ist auch W. DEC = EGF (§. 16). Folglich ist auch der dritte W. ECD = GFE (§. 31).

Da nun das △ EGF gleichschenklig ist, indem EG = EF gemacht worden, so ist (§. 43)

W. EGF = GFE

also ist auch im △ DEC

W. DEC = ECD

Das △ DEC ist also gleichschenklig (§. 49), folglich

DC = DE

also auch

DC + AD = DE + AD

= der gegebenen Summe AE.

Da ferner DC ‖ EF ist, so ist W. DCB = dem gegebenen Winkel C.

Anm. Diese Auflösung der Aufgabe ist durch die Auflösung veranlaßt, welche Robert Simson in Apollonius ebenen Oertern p. 424 gibt. Vgl. unten nach §. 91.

Art. 116. Aufg. Ein Viereck zu verzeichnen, wenn eine Seite, die Differenz zweyer andern Seiten und die Winkel gegeben sind. [Art. 93].

Aufl. (Fig. 120). Von dem zu verzeichnenden Viereck ABCD seyen die Seite AB, die Differenz der beyden Seiten AD und DC, und die Winkel A, B und C gegeben. Man nehme AB = der gegebenen Seite, trage daran die gegebenen Winkel A und B, nehme AE = der gegebenen Differenz der beyden Seiten AD nnd DC, ziehe aus E nach dem Schenkel BC des Winkels B eine gerade Linie EF, welche mit BC einen Winkel EFB = dem gegebenen Winkel C macht (Art. 93), nehme auf EA, die man nöthigen Falls über A hinaus verlängert, die EG = EF, und ziehe GF. Ferner ziehe man durch E die EC ‖ GF, bis sie die BC in C durchschneidet, und ziehe CD ‖ FE, bis sie die AE in D trifft; so ist ABCD das verlangte Viereck.

Bew. Es ist W. DCE = CEF (§. 17) = EFG (§. 17) und W. DEC = EGF (§. 16). Da nun W. EFG = EGF ist, als Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreyecks GFE, so ist auch W. DCE = DEC. Mithin ist das △ DEC gleichschenklig (§. 49) oder

$$DE = DC$$

also auch

$$AD - DE = AD - DC$$

folglich

$$AD - DC = AE$$

= dem gegebenen Unterschiede.

Da ferner DC ‖ EF ist, so ist W. DCB = EFB = dem gegebenen W. C.

Anm. Denkt man sich in den Aufgaben (Art. 102 bis 108) unterhalb der Grundlinie AB ein Dreyeck ABM, so erhält man jedesmal ein Viereck MBCA, in welchem AB eine Diagonale ist; und man erhält eben so viele Aufgaben zur Verzeichnung der Vierecke, wenn man, Statt Grundlinie des Dreyecks, „zwey Seiten und eingeschlossener Winkel des Vierecks" sagt. Die Auflösung dieser Aufgaben ergibt sich ganz aus der Auflösung jener. Denn durch die beyden Seiten MA, MB und den eingeschlossenen Winkel M ist das △ MAB, also auch die Diagonale AB des Vierecks bestimmt. Die Aufgaben selbst heißen so:

1) Von einem Vierecke sind zwey Seiten, der eingeschlossene und ein anliegender Winkel, und die Differenz der beyden andern Seiten gegeben: man soll das Viereck verzeichnen. Auflösung nach Art. 102.

2) Von einem Vierecke sind zwey Seiten, der eingeschlossene und ein anliegender Winkel, und die Summe der beyden andern Seiten gegeben: man soll das Viereck verzeichnen. Aufl. nach Art. 103.

3) Von einem Vierecke sind zwey Seiten, der eingeschlossene Winkel, die Summe der beyden andern Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel gegeben: man soll das Viereck verzeichnen. Aufl. nach Art. 104.

4) Von einem Vierecke sind zwey Seiten, der eingeschlossene Winkel, die Differenz der beyden andern Seiten und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel gegeben: man soll das Viereck verzeichnen. Aufl. nach Art. 105.

5) Von einem Vierecke sind zwey Seiten, der eingeschlossene Winkel, die Differenz der beyden anliegenden Winkel und die Differenz der beyden andern Seiten gegeben: man soll das Viereck verzeichnen. Aufl. nach Art. 107.

6) Von einem Vierecke sind zwey Seiten, der eingeschlossene Winkel, der diesem gegen über liegende Winkel, und die Differenz der beyden andern Winkel gegeben: man soll das Viereck verzeichnen. Aufl. nach Art. 108.

Theilung gerader Linien in gleiche Theile.
Art. 117 bis 120.

Art. 117. Aufg. Eine gegebene gerade Linie in drey gleiche Theile zu theilen.

Aufl. (Fig. 121). AB sey die gegebene gerade Linie. Man beschreibe über derselben ein gleichseitiges Dreyeck ABC, und halbire dessen beyde Winkel A und B durch die geraden Linien AD und BE, welche sich in E durchschneiden. Ferner halbire man die AF und BF durch die Perpendikel GI und HK, welche die gegebene AB in I und K treffen; so sind AI, IK und KB die gesuchten drey gleichen Theile von AB.

Bew. Da das △ ABC gleichseitig, also ein jeder seiner Winkel $= \frac{2}{3}$ R. ist (§. 28 und 50); so ist ein jeder der beyden W. FAB und FBA, als Hälften der Winkel A und B, $= \frac{1}{3}$ R.

Das △ FAB ist also gleichschenklig (§. 49), nämlich AF = BF.

Da GI auf der Mitte von AF senkrecht ist, so ist AI = FI (§. 47). Daher ist auch W. AFI = FAB $= \frac{1}{3}$ R. Mithin ist W. FIK = AFI + FAB (§. 29) $= \frac{2}{3}$ R.

Eben so läßt sich beweisen, daß BK = KF und W. FKI $= \frac{2}{3}$ R. ist.

In dem △ IKF ist also auch der dritte W. IFK $= \frac{2}{3}$ R. Das △ IKF ist daher gleichseitig (§. 50), oder es ist sowohl IF als KF der IK gleich. Nun war IF = AI und KF = KB. Folglich ist auch sowohl AI als KB der IK gleich.

Anm. Diese Auflösung der Aufgabe, eine gerade Linie in drey gleiche Theile zu theilen, setzt auch nicht von weitem die Lehre von den Verhältnissen voraus.

Art. 118. Aufg. Eine gegebene gerade Linie in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. (Fig. 78). Es sey AB die gegebene gerade Linie, welche z. B. in fünf gleiche Theile getheilt werden soll. Man

ziehe von dem einen Endpunkt A aus eine beliebige gerade Linie AC, schneide auf derselben fünf gleiche Stücke AD, DE, EF, FG, GC ab, verbinde den Punkt C mit dem andern Endpunkt B durch eine gerade Linie BC, und ziehe mit derselben die Linien GL, FK, EI und DH parallel, welche die gegebene AB in den Punkten L, K, I, H durchschneidet, so sind AH, HI, IK, KL, LB die fünf gleichen Theile von AB.

Bew. Man ziehe die Linien GM und FN der AB parallel, so sind beyde auch parallel unter einander. Nun ist GC = FG, W. CGM = GFN und W. GCM = FGN (§. 16), also △ CGM ≅ GFN; daher GM = FN.

GMBL und FNKL sind Parallelogramme (§. 25), also ist GM = LB und FN = KL. Es ist also auch LB = KL.

Eben so wird bewiesen, daß IK = KL ist; u. s. w.

Es sind folglich die fünf Theile von AB unter einander gleich.

(Clavius p. 69).

Anm. Vgl. Art. 142.

Art. 119. Aufg. Wie Art. 118.

Aufl. (Fig. 122). Es sey AB die gegebene Linie, welche z. B. in fünf gleiche Theile getheilt werden soll.

Man ziehe von A und B aus, unter beliebigen aber unter sich gleichen Winkeln BAD und ABC, die geraden Linien AD und BC; schneide auf jeder derselben vier, zusammen acht, unter sich gleiche Stücke ab, nämlich auf jeder ein Stück weniger, als die verlangte Zahl der Theile beträgt, und zwar auf AD die Stücke AH, HI, IK, KD, und auf BC die Stücke BE, EF, FG, GC; endlich ziehe man die geraden Linien ED, FK, GI, CH, welche die gegebene AB in den Punkten O, N, M, L durchschneiden: so sind AL, LM, MN, NO und OB die fünf verlangten unter sich gleichen Theile von AB.

Bew. Da die Winkel ABC und BAD einander gleich sind, so sind BC und AD parallel (§. 19).

Da FE ‖ KD, so ist FEKD ein Parallelogramm (§. 59), also ED ‖ FK (§. 25). Eben so ist GI ‖ FK und CH ‖ GI.

Man ziehe EP und FQ der AB parallel, so ist W. GFQ = FEP, und, da GI ‖ FK ist, auch W. QGF = PFE (§. 16), so wie GF = FE, also △ GFQ ≅ FEP; daher QF = PE.

Es sind aber MQFN und NPEO Parallelogramme (§. 25), also MN = QF und NO = PE.

Folglich sind auch MN und NO einander gleich.

Auf ähnliche Art sind alle fünf Theile AL, LM, MN, NO, OB unter einander gleich.

Anm. Der Beweis dieses Satzes kann auch auf den Beweis des vorhergehenden (Art. 118) gegründet werden. Da nämlich die Linien CH, GI, FK, ED unter sich parallel sind, und da auf AD vier unter sich gleiche Stücke abgeschnitten sind, so ist auch AO in vier gleiche Theile, AL, LM, MN, NO, getheilt. Eben so ist LB in vier gleiche Theile, BO, ON, NM, ML, getheilt. Es sind also alle fünf Theile von AB unter einander gleich. (Clavius p. 69).

Art. 120. Aufg. Wie Art. 118.

Aufl. (Fig. 123). Man verzeichne eine hinlänglich große Zahl Parallellinien in gleichem Abstand von einander, wie Ao, B1, C2 u. s. w.

Soll nun z. B. die Linie MN in fünf gleiche Theile getheilt werden, so nehme man auf der ersten der parallellen Linien einen beliebigen Punkt I an, und schneide von ihm aus IK = MN auf der mit F5 bezeichneten Parallellinie ab; so sind die zwischen je zweyen zunächst liegenden Parallellinien enthaltenen Theile IW, WX, XY, YZ, ZK unter einander gleich.

Bew. Es sey AH senkrecht auf Ao, so ist, da die Parallellinien gleichen Abstand von einander haben, AB = BC = CD u. s. w.

Man ziehe AR und BS der IK parallel, so ist AB = BC, W. BAR = CBS und W. ABR = BCS, also △ ABR ≅ BCS; daher AR = BS.

Da nun AIWR und BWXS Parallelogramme sind, so ist IW = AR und WX = BS. Es sind folglich auch IW und WX einander gleich.

Eben so wird bewiesen, daß sämmtliche Theile von IK unter einander gleich sind.

Anm. - Die Zeichnung (Fig. 123) läßt sich gleichsam als ein Instrument betrachten, das dazu dient, beliebige gegebene Linien in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. Wäre z. B. die Linie PQ in drey gleiche Theile zu theilen, so dürfte man nur die PQ in TV auf das Instrument tragen, so ist PQ = TV in die drey gleichen Theile Tb, bc, cV getheilt. Man könnte sich mehre solche Instrumente verfertigen, in welchen die Parallellinien größere oder kleinere, unter sich gleiche, Abstände von einander hätten. (Clavius p. 69).

Art. 21. Aufg. Es ist der Ueberschuß der Diagonale eines Quadrats über dessen Seite gegeben; man soll das Quadrat selbst finden.

Aufl. (Fig. 124). Es sey AB der gegebene Ueberschuß der Diagonale eines Quadrats über seine Seite. Man beschreibe über AB das Quadrat ABCD, ziehe die Diagonale BD und nehme auf der Verlängerung derselben DE = DA; so ist BE die Seite des gesuchten Quadrats.

Bew. Man errichte in E das Perpendikel EF auf EB, welches die Verlängerung von BA in F schneidet, und ziehe AE; so ist in dem △ BEF der W. BEF = 1 R. und der W. EBF = $\frac{1}{2}$ R., folglich auch der Winkel EFB = $\frac{1}{2}$ R. Es sind also die Winkel EBF und EFB einander gleich; daher das △ EBF gleichschenklig, mithin EF = EB.

Da ferner DE = DA ist, so ist auch W. DEA = DAE.

Zieht man jenen von dem rechten W. DEF und diesen von dem rechten W. DAF ab, so bleibt der W. AEF = EAF.

Es ist also auch das Dreyeck EAF gleichschenklig, mithin AF = EF = EB.

Es ist folglich EB oder FA die Seite eines Quadrats, in welchem FB die Diagonale und AB der Ueberschuß der Diagonale über die Seite ist.

(Clavius p. 103).

Anm. Die Betrachtung der Figur führt zugleich auf die Auflösung der Aufgabe: „aus der gegebenen Summe der Diagonale eines Quadrats und seiner Seite das Quadrat zu finden.“ Es ist nämlich EB die Summe der Diagonale DB und der Seite DA des Quadrats ABCD. Man beschreibe also über der gegebenen Linie EB ein Quadrat EBFG, nehme auf der Diagonale FB desselben das Stück FA = FE, errichte in A das Perpendikel AD auf FB, welches die EB in D durchschneidet; so ist AD die Seite des gesuchten Quadrats. Die Führung des Beweises wird dem Leser überlassen.

Art. 122. Aufg. Aus der gegebenen Summe der Diagonale und Seite eines Quadrats das Quadrat selbst zu finden.

Aufl. (Fig. 125). Man beschreibe über der gegebenen Linie AB ein Quadrat ABCD, ziehe die Diagonale BD, schneide auf derselben DE = DA ab, und errichte in E auf DB das Perpendikel EF, welches die AB in F durchschneidet; so ist AF die Seite und FB die Diagonale des gesuchten Quadrats.

Bew. Man ziehe DF, so haben die beyden in A und E rechtwinkligen Dreyecke DAF und DEF die Hypotenuse DF gemein, und der eine Kathete DA ist dem Katheten DE gleich. Es ist also auch der andere Kathete AF dem Katheten FE gleich.

Im △ FEB ist der W. E ein rechter Winkel, und der Winkel EBF ein halber rechter, also ist der W. EFB ebenfalls ein halber rechter Winkel; daher W. EFB = EBF, also EB = EF = AF.

Es ist folglich FB die Diagonale eines Quadrats, worin FE oder AF die Seite ist.

Anm. Es gilt hier eine ähnliche Bemerkung, wie zum Art. 121; daß nämlich auch hier die Betrachtung der Figur sogleich auf die Auflösung der andern Aufgabe führt, „aus dem gegebenen Ueberschuß der Diagonale eines Quadrats über seine Seite das Quadrat selbst zu finden."

Art. 123. Aufg. Aus dem gegebenen Ueberschuß der Seite eines gleichseitigen Dreyecks über dessen Höhe das Dreyeck zu finden.

Aufl. (Fig. 126). Es sey ab der gegebene Ueberschuß der Seite eines gleichseitigen Dreyecks über dessen Höhe. Man beschreibe einen Winkel ABC = $\frac{2}{3}$ R. (dieß kann z. B. dadurch geschehen, daß man ein gleichseitiges Dreyeck beschreibt), schneide auf dessen einem Schenkel BC das Stück BD = ab ab, errichte in D das Perpendikel DE auf CB, welches den andern Schenkel BA des Winkels ABC in E durchschneidet; mache dann EF = DE und errichte in F auf BA ein Perpendikel FC, welches die BC in C trifft: so ist BC die Seite des gesuchten Dreyecks.

Bew. Man mache FA = FB und ziehe AC; so ist △ AFC ≌ CFB (§. 39), also W. CAB = CBA = $\frac{2}{3}$ R., daher auch W. BCA = $\frac{2}{3}$ R. Mithin ist ABC ein gleichseitiges Dreyeck.

Man ziehe CE, so haben die beyden in D und F rechtwinkligen Dreyecke CDE und CFE die Hypotenuse CE mit einander gemein, und den einen Katheten DE dem Katheten FE (nach der Constr.) gleich. Es ist also auch der andere Kathete CD = dem Katheten CF.

Folglich ist BD = BC — CD = BC — CF = dem Unterschiede der Seite und Höhe des gleichseitigen Dreyecks.

Nach §. 63.

Art. 124. Lehrs. Eine gerade Linie, aus dem Winkel eines Dreyecks nach der Mitte der gegen über liegenden Seite gezogen, theilt das Dreyeck in zwey gleich große Theile.

Bew. (Fig. 127). Im △ ABC sey die gerade Linie CD aus dem W. C nach der Mitte D der gegen über liegenden Seite AB gezogen, so ist zu beweisen, daß die beyden Dreyecke ADC und BDC gleich groß sind.

Man ziehe CE ∥ BA, nehme CE = BD = DA, und ziehe AE und ED.

Da AD ‡ EC ist, so ist ADCE ein Parallelogramm (§. 59). Da das Parallelogramm durch die Diagonale in zwey congruente Dreyecke getheilt wird (§. 55), so ist

$$\triangle \text{ADC} = \tfrac{1}{2} \text{ADCE}$$

und

$$\triangle \text{EDC} = \tfrac{1}{2} \text{ADCE}$$

also

$$\triangle \text{ADC} = \triangle \text{EDC}.$$

Nun ist aber auch, da EC ‡ BD ist, das Viereck ECBD ein Parallelogramm; und, da das Parallelogramm durch die Diagonale in zwey congruente Dreyecke getheilt wird, so ist ebenfalls

$$\triangle \text{BDC} = \triangle \text{EDC}$$

Folglich ist

$$\triangle \text{ADC} = \triangle \text{BDC}.$$

Art. 125. Lehrs. Wie Art. 124.

Bew. (Fig. 128). Im △ ABC sey die gerade Linie CD aus dem W. C nach der Mitte D der gegen über liegenden Seite AB gezogen.

Man ziehe DE ∥ BC und DF ∥ AC, bis sie die Seiten AC und BC in E und F treffen; so ist AD = DB, W. EAD = FDB und W. EDA = FBD, also

$$\triangle \text{ADE} \cong \text{DBF}.$$

Eben so ist DC = DC, W. EDC = DCF und W. ECD = CDF, also

$$\triangle \text{EDC} \cong \text{CFD}$$

Daher

$$\triangle \text{ADE} + \text{EDC} = \text{DBF} + \text{CFD}$$

oder

$$\triangle ADC = \triangle BDC.$$

Anm. 1. Dieser Lehrsatz kann dazu gebraucht werden, um ohne Voraussetzung des Satzes von der Gleichheit der Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe die Gleichheit der Dreyecke von gleicher Grundlinie und Höhe zu beweisen. Denn, denken wir uns die Grundlinie AB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, und nach den Theilungspunkten gerade Linien aus C gezogen, wodurch das $\triangle$ ABC in eben so viele Dreyecke zerfällt, die alle gleiche Höhe haben, als die Zahl der gleichen Theile der Grundlinie beträgt: so sind jede zwey benachbarten dieser Dreyecke unter einander gleich; folglich sind auch alle diese Dreyecke unter einander gleich. Nehmen wir nun z. B. Ax und By beyde derselben Anzahl jener Theile gleich, und ziehen Cx und Cy, so ist $\triangle$ ACx = BCy.

Anm. 2. Obiger Lehrsatz konnte auch so ausgedrückt werden:

Zwey Dreyecke sind gleich groß, wenn zwey Seiten des einen zweyen Seiten des andern gleich sind, und der eingeschlossene Winkel im einen der Nebenwinkel vom eingeschlossenen Winkel im andern ist.

Art. 126. Lehrs. Unter allen geraden Linien, welche zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels durch einen innerhalb des Winkels gegebenen Punkt gezogen werden können, bildet diejenige mit den Schenkeln des Winkels das kleinste Dreyeck, in deren Mitte der gegebene Punkt liegt.

Bew. (Fig. 129). ABA sey der gegebene Winkel, D der innerhalb desselben gegebene Punkt, EE sey durch D so gezogen, daß D in der Mitte von EE liegt, FG sey irgend eine andere durch D gezogene gerade Linie; so ist zu beweisen, daß $\triangle$ FGB $>$ $\triangle$ EEB ist.

Man ziehe durch E eine Linie EH ∥ BA, bis sie die DF in H trifft; so ist ED = ED (Vorauss.) W. HDE =

EDG (§. 14) und W. HED = DEG (§. 17); also △ HDE ≌ DEG (§. 40).

Nun ist △ FDE > HDE, also auch > DEG, folglich

EDGB + FDE > EDGB + DEG

oder

△ FGB > EEB.

(Th. Simpson p. 199).

Art. 127. Lehrs. Unter allen Parallelogrammen, die in einem gegebenen Dreyeck so eingeschrieben werden können, daß ein Winkel des Parallelogramms mit einem Winkel des Dreyecks zusammen, und die gegen über liegende Ecke des Parallelogramms auf die gegen über liegende Seite des Dreyecks fällt, ist dasjenige am größten, dessen Ecke die Seite des Dreyecks, auf welche sie fällt, halbirt [Art. 126.]

Bew. (Fig. 130). ABC sey das gegebene Dreyeck; in demselben sey das Parallelogramm ADEF so eingeschrieben, daß sein Winkel FAD mit dem W. BAC des Dreyecks zusammen fällt, und die dem Winkel FAD gegen über liegende Ecke E auf der Seite BC so liegt, daß BE = EC ist.

Es sey G irgend ein anderer Punkt auf BC, also BG nicht = GC, und das Parallelogramm GHAI beschrieben. Man mache HK = AH, ziehe KG und verlängere sie bis sie die AC in L durchschneidet; so ist KH = GI, weil beyde gleich AH sind, W. KHG = GIL, weil beyde gleich A sind, und W. GKH = LGI, also △ GKH ≌ LGI, mithin KG = GL.

Es ist also △ KAL < △ BAC, weil KL durch den Punkt G so gezogen ist, daß KG = GL, hingegen BC durch den Punkt G so gezogen ist, daß BG nicht = GC ist. (Art. 126).

Nun ist, wenn man sich die Diagonale HI gezogen denkt,

$$\triangle\, GKH = \triangle\, IHA = \tfrac{1}{2}\, AHGI \text{ (§. 55)}$$

also

$$\triangle\, GKH + LGI = AHGI$$

folglich

$$\triangle \text{AKL} = 2.\ \text{AHGI}.$$

Eben so ist, da BE = EC, W. EBF = CED und W. BEF = ECD ist, △ BEF ≅ CED (§. 40); also auch BF = ED = FA. Nun ist, wenn man sich die Diagonale FD gezogen denkt,

$$\triangle \text{EBF} = \triangle \text{DFA} = \tfrac{1}{2}\ \text{AFED}$$

also

$$\triangle \text{EBF} + \text{CED} = \text{AFED}$$

folglich

$$\triangle \text{ABC} = 2.\ \text{AFED}.$$

Da nun △ ABC > △ AKL ist, so ist auch 2. AFED > 2. AHGI, oder

$$\text{AFED} > \text{AHGI}.$$

Anm. Das größte Parallelogramm also, das sich auf die im Lehrsatz angegebene Art in einem gegebenen Dreyeck beschreiben läßt, ist halb so groß als das Dreyeck. Die drey Parallelogramme, die sich auf die im Lehrsatz angegebene Art in den drey Winkeln des Dreyecks beschreiben lassen, sind also auch unter einander gleich. Innerhalb des △ ABC läßt sich also auf gar keine Art ein Parallelogramm beschreiben, das größer als AFED, oder größer als die Hälfte des Dreyecks wäre.

Eben so ließe sich innerhalb des Parallelogramms AFED auf keine Art ein Dreyeck beschreiben, das größer als das △ AFD, oder größer als die Hälfte des Parallelogramms wäre.

Th. Simpson gibt unsern Lehrsatz als Zusatz zu dem Lehrsatz Art. 126. Allein es möchte schwer seyn, ohne weiteren Beweis den Zusammenhang desselben mit dem Lehrsatze zu durchschauen.

Art. 128. Lehrs. Jedes Trapez ist die Hälfte eines Parallelogramms, dessen Seiten den beyden Diagonalen, und

dessen Winkel dem Winkel gleich ist, den die beyden Diagonalen mit einander machen.

Bew. (Fig. 134). ABCD sey ein beliebiges Trapez; AC und BD seyen die beyden Diagonalen desselben, die sich im Punkte M durchschneiden.

Man ziehe durch A und C die geraden Linien EH und FG der Diagonale DB, und durch B und D die EF und HG der Diagonale AC parallel; so ist auch EH $\parallel$ FG und EF $\parallel$ HG, also (§. 25) EFGH ein Parallelogramm.

Auch sind (§. 25) DMCF, MBGC, AHBM und EAMD Parallelogramme. Darin sind DC, BC, AB und AD die Diagonalen. Also ist (§. 55)

$$DMCF = 2 . \triangle DMC$$
$$MBGC = 2 . \triangle BMC$$
$$AHBM = 2 . \triangle AMB$$

und

$$EAMD = 2 . \triangle AMD$$

daher

$$DMCF + MBGC + AHBM + EAMD$$
$$= 2 . (\triangle DMC + BMC + AMB + AMD)$$

oder

$$\text{Parallelogramm } EFGH = 2 \times \text{Trapez } ABCD.$$

(Ozanam I. p. 280).

Anm. 1. Ein Trapez läßt sich daher auch sehr leicht aus seinen beyden Diagonalen, und dem Winkel, welchen dieselben einschließen, trigonometrisch berechnen. S. Meier Hirsch I. S. 37.

Eben so kann unser Lehrsatz auch zur Ausmessung der Trapeze angewandt werden.

Anm. 2. Ein anderes Trapez, das die eine Diagonale = AC und die andere = BD und den Winkel, den beyde bilden, = CMB hätte, wäre dem Trapez ABCD an Inhalt gleich, was es auch sonst für eine Gestalt hätte.

Anm. 3. Das Trapez ist auch einem Dreyeck gleich, das zwey Seiten = den beyden Diagonalen, und den eingeschlosse-

nen Winkel = dem Winkel hat, den die beyden Diagonalen mit einander bilden.

Anm. 4. Alles dieses läßt sich auch auf das Trapez mit eingehendem Winkel anwenden. So ist das Trapez EMHC, das einen eingehenden Winkel bey M, und die Diagonalen EH und CM hat, = der Hälfte des Parallelogramms BDFG. Der Beweis bleibt dem Leser überlassen.

Zu §. 64.

Art. 129. Lehrs. Parallelogramme auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallellinien sind gleich groß.

Bew. (Fig. 135). ABCD und ABEF seyen zwey Parallelogramme, die auf derselben Grundlinie AB und zwischen denselben Parallellinien AB und DE stehen.

Es ist W. ADF = BCE

W. DFA = CEB

und

AD = BC

also (§. 40)

△ ADF ≌ BCE

folglich auch

ABED — ADF = ABED — BCE

oder

ABEF = ABCD.

(Th. Simpson p. 29).

Anm. Dieser Beweis von Th. Simpson hat das vor dem bekannten Euklidischen Beweis voraus, daß er allgemein für alle möglichen Fälle gilt. — R. Simson sagt S. 657, so viel ihm bekannt, habe zuerst Clairaut in seinen Elementen diesen Beweis gegeben, und nach ihm Simpson. Er glaubt den Beweis, den Simpson gibt, dadurch zu verbessern, daß er (S. 54) die Congruenz der Dreyecke ADF und BCE durch die Gleichheit der Seiten AD, DF mit BC, CE und des eingeschlossenen W. ADF mit BCE beweist; dadurch verfällt er

aber, wenigstens bei dem Beweis der Congrüenz dieser beyden Dreyecke, wieder in die Unterscheidung der drey Fälle.

Nach §. 64.

Art. 130. Lehrs. Das Dreyeck ist halb so groß als das Rechteck, das mit ihm auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallellinien steht.

Bew. (Fig. 136 und 137). ABC sey ein Dreyeck, das mit dem Rechteck ABDE auf derselben Grundlinie AB und zwischen denselben Parallellinien AB und ED steht.

Man fälle aus C das Perpendikel CF auf AB oder ihre Verlängerung, so sind AFCE und FBDC ebenfalls Rechtecke.

Da die Diagonale ein jedes Parallelogramm in zwey congruente Dreyecke theilt (§. 55), so ist

$$FBDC = 2. \triangle BFC$$

und

$$AFCE = 2. \triangle AFC$$

also

1) $FBDC + AFCE = 2. \triangle BFC + 2. \triangle AFC$
$= 2. (\triangle BFC + AFC)$

oder (Fig. 136)

$$ABDE = 2. \triangle ABC$$

und

2) $FBDC - AFCE = 2. \triangle BFC - 2. \triangle AFC$
$= 2. (\triangle BFC - AFC)$

oder (Fig. 137)

$$ABDE = 2. \triangle ABC$$

3) Fiele das Perpendikel CF in den Punkt A selbst, oder wäre das $\triangle$ ABC rechtwinklig in A, hieße das Dreyeck z. B. BFC (Fig. 137), so hätte man sogleich

$$BFCD = 2. \triangle BFC.$$

Zus. Da das schiefwinklige Parallelogramm dem Rechteck gleich ist, das mit ihm auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallellinien steht (§. 64), so ist also auch

das Dreyeck halb so groß als ein jedes Parallelogramm, das mit ihm auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallellinien steht.

Lehrsatz des Pappus über Parallelogramme auf den drey Seiten eines Dreyecks (lib. IV, prop. 1), nebst Folgerungen aus demselben.

Art. 131–135.

Art. 131. Lehrs. Wenn man auf zweyen Seiten eines Dreyecks beliebige Parallelogramme nach außen beschreibt; so ist die Summe derselben demjenigen Parallelogramme der dritten Seite des Dreyecks gleich, dessen zweyte Seite gleich und parallel der geraden Linie ist, welche den Durchschnittspunkt der gegen über liegenden Seiten der beyden ersten Parallelogramme, oder ihrer Verlängerungen, mit der eingeschlossenen Ecke des Dreyecks verbindet.

Bew. (Fig. 138). ACB sey ein beliebiges Dreyeck. Auf den beyden Seiten AB und CB seyen die beliebigen Parallelogramme ABED und CBGF nach außen, d. h. so beschrieben, daß sie ganz außerhalb des △ ABC liegen. Die den beyden Seiten AB und BC des Dreyecks gegen über liegenden Seiten DE und FG der Parallelogramme oder die Verlängerungen der Seiten DE und FG durchschneiden sich in dem Punkte H, und es sey dieser Durchschnittspunkt H mit der eingeschlossenen Ecke B des Dreyecks durch die gerade Linie BH verbunden. Endlich sey über des Dreyecks dritter Seite AC das Parallelogramm ACML beschrieben, dessen zweyte Seite AL ‡ BH sey: so ist zu beweisen, daß ABED + CBGF = ACML ist.

Man construire das Parallelogramm ACML auf die Art, daß man AL und CM ll AH zieht, bis sie den Seiten DE und FG oder ihren Verlängerungen in L und M begegnen, und dann L und M durch die gerade Linie LM verbindet. Da nämlich AL ll BH und LH ll AB, so ist ABHL ein Parallelogramm, also AL = BH. Eben so ist BCMH ein Parallelogramm und CM = BH.

Da nun AL $\#$ BH und CM $\#$ BH ist, so ist AL $\#$ CM, also ACML ein Parallelogramm (§. 59) und zwar das Parallelogramm über AC, dessen andere Seite AL $\#$ BH ist.

Man verlängere HB bis sie die AC in K trifft. HK durchschneide die LM in N.

Die beyden Parallelogramme ABHL und ABED stehen auf derselben Grundlinie AB und zwischen denselben Parallellinien AB und DH, also ist (§. 64)

$$ABHL = ABED.$$

Eben so stehen die beyden Parallelogramme ABHL und ALNK auf derselben Grundlinie AL und zwischen denselben Parallellinien AL und HK, also ist (§. 64)

$$ABHL = ALNK.$$

Daher ist

Parallelogramm ABED = ALNK

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß

Parallelogramm BCFG = CMNK

ist.

Also ist

$$ABED + BCFG = ALNK + CMNK$$
$$= ACML.$$

(S. unten Anm. 2 zu Art. 136).

Anm. Des dritten Parallelogramms W. LAC ist der Summe der beyden W. BAC und DHB gleich. Eben so ist W. MCA = BCA + FHB.

Art. 132. Lehrs. Wenn man auf zweyen Seiten eines Dreyecks beliebige Parallelogramme nach innen beschreibt; so ist die Summe derselben demjenigen Parallelogramme der dritten Seite des Dreyecks gleich, dessen zweyte Seite gleich und parallel der geraden Linie ist, welche den Durchschnittspunkt der den Dreyecksseiten gegen über liegenden Seiten der beyden ersten Parallelogramme, oder ihrer Verlängerungen, mit der eingeschlossenen Ecke des Dreyecks verbindet. [Art. 30. Zus.].

Bew. (Fig. 139 und 140). ACB sey ein beliebiges Dreyeck. Auf den beyden Seiten AB und CB seyen die beliebigen Parallelogramme ABED und CBGF nach innen, d. h. so beschrieben, daß ihre Flächen zum Theil mit der Fläche des △ ABC zusammen fallen. Die den beyden Seiten AB und CB des Dreyecks gegen über liegenden Seiten DE und FG der Parallelogramme oder die Verlängerungen der Seiten DE und FG durchschneiden sich in dem Punkte H, und es sey dieser Durchschnittspunkt H mit der von den Seiten AB und BC gebildeten Ecke B durch die gerade Linie BH verbunden. Endlich sey über des Dreyecks dritter Seite AC das Parallelogramm ACML beschrieben, dessen zweyte Seite AL ‡ BH sey: so ist zu beweisen, daß ABED + CBGF = ACML ist.

Die BH oder ihre Verlängerung treffe die Seite AC in K und LM in N.

Man ziehe die Linien BM und HC. Da BH ‡ CM, so ist BHCM ein Parallelogramm (§. 59).

Da das Parallelogramm BCFG mit dem △ BCH auf derselben Grundlinie BC und zwischen denselben Parallellinien BC und FG liegt, also auch gleiche Höhe hat, so ist (Art. 130. Zus.)

Parallelogramm BCFG = 2. △ BCH.

Und, da das Parallelogramm durch die Diagonale in zwey congruente Dreyecke getheilt wird, so ist (§. 55)

Parallelogramm BMCH = 2. △ BCH.

Daher ist

Parallelogr. BCFG = Parallelogr. BMCH.

Es ist aber auch, da das Parallelogramm CMNK mit dem Parallelogramm CMBH auf derselben Grundlinie CM und zwischen denselben Parallellinien CM und BK steht,

Parallelogr. CMNK = Parallelogr. BMCH.

Folglich ist

Parallelogr. BCFG = Parallelogr. CMNK.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, indem man die geraden Linien BL und HA zieht, daß

Parallelogr. ABED = Parallelogr. LNKA ist.

Mithin ist

Prg. BCFG + ABED = CMNK + LNKA

= ACML.

Anm. Die Gleichheit der Parallelogramme BCFG und CMNK läßt sich noch auf mehrfache andere Art beweisen (z. B.

BCFG = 2. △ BHC

und

CMNK = 2. △ BMC

aber

△ BHC = BMC

also

BCFG = CMNK);

aber nie ohne Hülfslinien, wie das in Art. 131 oder in Fig. 138 der Fall war, und in dem ersten Fall des folgenden Art. 133 oder in Fig. 141 der Fall seyn wird: indem jetzt die beyden Ecken L und M des Parallelogramms ACML nicht mit den Seiten DE und FG der beyden andern Parallelogramme zusammen fallen.

Art. 133. Lehrs. Wenn man auf zweyen Seiten eines Dreyecks beliebige Parallelogramme, eines nach außen und das andere nach innen, beschreibt; so ist die Differenz derselben demjenigen Parallelogramme der dritten Seite des Dreyecks gleich, dessen zweyte Seite gleich und parallel der geraden Linie ist, welche den Durchschnittspunkt der gegen über liegenden Seiten der beyden ersten Parallelogramme, oder ihrer Verlängerungen, mit der eingeschlossenen Ecke des Dreyecks verbindet. [Art. 130. Zus.].

Bew. (Fig. 141 und 142). ACB sey ein beliebiges Dreyeck. Auf den beyden Seiten AB und CB seyen die beliebigen Parallelogramme, ABED nach innen und CBGF nach außen, beschrieben. Die den beyden Seiten AB und CB des Dreyecks gegen über liegenden Seiten DE und FG der Parallelogramme, oder die Verlängerungen derselben, durchschneiden sich in dem Punkte H, und es sey dieser Durschnittspunkt H

mit der von den Seiten AB und BC gebildeten Ecke B durch die gerade Linie BH verbunden. Endlich sey über des Dreyecks dritter Seite AC das Parallelogramm ACML beschrieben, dessen zweyte Seite AL ‡‡ BH sey: so ist zu beweisen, daß ACML der Differenz der beyden Parallelogramme BCFG und ABED gleich ist.

Erster Fall. Wenn das nach außen beschriebene Parallelogramm BCFG größer als das nach innen beschriebene ABED ist (Fig. 141).

Man construire das Parallelogramm ACML auf die Art, daß man AL und CM ll BH zieht, bis sie den Seiten DE und FG oder ihren Verlängerungen in L und M begegnen, und dann L und M durch die gerade Linie LM verbindet. Da nämlich AL ll BH und LH ll AB ist, so ist ABHL ein Parallelogramm, also AL = BH. Eben so ist BCMH ein Parallelogramm, und CM = BH. Da nun AL ‡‡ BH und CM ‡‡ BH, so ist AL ‡‡ CM, also ACML ein Parallelogramm (§. 59) und zwar das Parallelogramm über AC, dessen zweyte Seite AL ‡‡ BH ist.

Man verlängere HB, bis sie die Verlängerung von AC in K trifft. HK durchschneide die Verlängerung von ML in N.

Es ist (§. 64)

Prg. BCFG = Prg. BCMH

und

Prg. CMNK = Prg. BCMH

also

Prg. BCFG = Prg. CMNK

Eben so wird bewiesen, daß

Prg. ABED = Prg. ALNK

ist. Folglich ist

Prg. BCFG — ABED = Prg. CMNK — ALNK
= Prg. ACML.

Zweyter Fall. Wenn das nach innen beschriebene Parallelogramm ABED größer als das nach außen beschriebene BCFG ist (Fig. 142).

Die BH treffe die Verlängerung der Seite AC in K, und die Verlängerung der Seite LM in N.

Man ziehe BL und HA, so ist, da AL ‡‡ BH, das Viereck BLAH ein Parallelogramm.

Nun ist, da das △ ABH mit dem Parallelogramm ABED auf derselben Grundlinie AB und zwischen denselben Parallellinien AB und DE liegt (Art. 130. Zus.)

Prg. ABED = 2. △ ABH.

Ferner ist, da das △ ALB mit dem Parallelogramm ALNK auf derselben Grundlinie AL und zwischen denselben Parallellinien AL und BK liegt,

Prg. ALNK = 2. △ ALB.

Nun ist, da ALBH ein Parallelogramm ist,

△ ABH = △ ALB (§. 55)

also auch

2. △ ABH = 2. △ ALB.

Folglich ist auch

Prg. ABED = Prg. ALNK.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, indem man die geraden Linien BM und HC zieht, daß

Prg. BCFG = Prg. MCKN ist.

Folglich ist

Prg. ABED — Prg. BCFG = Prg. ALNK
— Prg. MCKN = Prg. ACML.

(S. unten Anm. 2 zu Art. 136).

Anm. 1. Es gilt hier in Hinsicht auf den zweyten Fall dieselbe Bemerkung, wie in der Anm. zu Art. 132. Die Gleichheit der Parallelogramme ABED und ALNK läßt sich in diesem zweyten Fall oder in Fig. 142 durchaus nicht ohne Hülfslinien beweisen; indem auch jetzt die beyden Ecken L und M des Parallelogramms ACML nicht mit den Seiten DE und FG der beyden andern Parallelogramme zusammen fallen.

Anm. 2. Sind die beyden über AB und BC nach innen und außen beschriebenen Parallelogramme ABED und BCFG einander gleich (wie Fig. 143); so ist das Parallelogramm

über der dritten Seite AC = o, also die Höhe dieses Parallelogramms = o, d. h. seine zweyte, der BH gleiche und parallel gehende, Seite AL fällt der Richtung nach mit AC zusammen; mithin ist dann BH ll AC, oder die Verlängerung von BH trifft die AC nirgends.

Umgekehrt, wenn die, nach der Proposition des Lehrsatzes beschriebene, BH der AC parallel geht, so sind die über AB und BC nach innen und außen beschriebenen Parallelogramme ABED und BCFG einander gleich. — Auf diese Weise können wir durch fortgesetzte Verengerung (oder Hinzuziehung neuer Bedingungen) zu dem Lehrsatz zurück kommen, auf welchen unser Lehrsatz gebaut ist, daß nämlich Parallelogramme auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallellinien einander gleich sind.

Anm. 3. Sind in Fig. 138—140 die beyden über AB und BC beschriebenen Parallelogramme einander gleich, so trifft die Verlängerung von BH auf die Mitte der dritten Seite AC.

Art. 134. Lehrs. Das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyecks ist der Summe der Quadrate der beyden Katheten gleich [Art. 131].

Bew. (Fig. 144). Das △ ABC sey rechtwinklig in B. Man beschreibe auf den Katheten AB und BC die Quadrate ABED und BCFG nach außen; verlängere die DE und FG, bis sie sich in H durchschneiden, ziehe BH, und dieser parallel die AL und CM, bis sie die DE und FG oder ihre Verlängerungen in L und M treffen; so ist, da LH ll AB und AL ll BH, das Viereck ABHL ein Parallelogramm, also AL auch = BH. Eben so ist CM = BH. Da nun AL ‡ BH und CM ‡ BH; so ist AL ‡ CM, also ACML ein Parallelogramm (§. 59) und zwar ein Parallelogramm über der dritten Seite AC des Dreyecks, dessen zweyte Seite AL ‡ BH ist. Also ist (Art. 131)

Prg. ACML = ABED + BCFG.

Es ist jetzt nur noch zu beweisen, daß das Prg. ACML ein Quadrat ist.

Man verlängere HF und AC bis sie sich in p durchschneiden.

Da ACML ein Parallelogramm ist, so ist LM ╫ AC, also ist auch W. LMH = HpK = BCA. Eben so ist W. HLM = BAC; daher △ LHM ≌ ABC (§. 40); mithin LH = AB = DE.

Daher ist DE — LE = LH — LE oder DL = EH = BG (§. 56) = BC.

In den beyden Dreyecken ADL und ABC ist also DL = BC, AD = AB (als Seiten desselben Quadrats) und W. ADL = ABC; daher ist △ ADL ≌ ABC.

Mithin ist W. DAL = BAC; also BAC + BAL oder CAL = DAL + BAL = BAD = 1 R. Das Parallelogramm ACML ist also rechtwinklig.

Auch ist AL = AC. Das Parallelogramm ACML ist also auch gleichseitig.

Folglich ist das Parallelogramm ACML ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse.

Es ist also

Quadrat ACML = Quadr. ABED
+ Quadr. BCFG.

Anm 1. Dieser Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes ist eine leichte Folgerung aus dem Lehrsatze Art. 131. Dieser Lehrsatz schließt gleichsam den Pythagoräischen als einen besonderen Fall in sich.

Anm. 2. Etwas kürzer wird der Beweis, wenn man (mit Castillon, vgl. unten Anm. 2 zu Art. 136) auf folgende Art construirt: Man beschreibe über AC das Quadrat ACML; ferner fälle man aus B das Perpendikel BH auf AC, verlängere dasselbe über B hinaus, und mache BH = AL. Dann ziehe man HL und HM, errichte in A und B auf AB die Perpendikel AD und BE bis sie die LH oder ihre Verlängerung in D und E treffen, und beschreibe auf ähnliche Weise das Rechteck BCFG.

Da sowohl AL als BH auf AC senkrecht sind, so ist AL ‖ BH. Es ist aber auch AL = BH; also ist, nach Art. 131,

Quadrat ACML = Rechteck ABED + BCFG,

und es ist nur noch zu beweisen, daß die beyden Rechtecke ABED und BCFG Quadrate sind.

Es ist W. DAB — LAB = LAC — LAB (denn DAB und LAC sind beydes rechte Winkel), also W. DAL = BAC. Ferner ist W. LDA = CBA und AL = AC; also △ ADL ≅ ABC; daher AD = AB. Das Rechteck ABED ist also ein Quadrat. Eben so wird bewiesen, daß das Rechteck BCFG ein Quadrat ist.

Art. 135. Lehrs. In jedem stumpfwinkligen Dreyeck ist das Quadrat der Seite, die dem stumpfen Winkel gegen über steht, größer als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten; und zwar um die beyden Rechtecke zwischen der dem stumpfen Winkel anliegenden Seite und ihrer bis zu dem, aus der gegen über liegenden Ecke auf sie gefällten, Perpendikel reichenden Verlängerung [Art. 131].

Bew. (Fig. 145). In dem △ ABC stehe die Seite AC einem stumpfen W. ABC gegen über, und es sey AP senkrecht auf die Verlängerung von CB, und CO senkrecht auf die Verlängerung von AB; so ist zu beweisen, daß das Quadrat von AC größer ist als die Quadrate von AB und BC, und zwar um die beyden Rechtecke zwischen AB und BO und zwischen BC und BP. [Ein Rechteck zwischen zweyen Linien heiße nämlich ein solches, dessen beyde an einander liegende Seiten, einzeln genommen, den beyden Linien gleich sind].

Man beschreibe über AC das Quadrat ACML, fälle aus B das Perpendikel BK auf AC, verlängere dasselbe über B hinaus und mache BH = AL. Ferner ziehe man HL und errichte in A und B auf AB die Perpendikel AD und BE bis sie die HL oder ihre Verlängerung in E und D treffen. Eben so ziehe man HM, und errichte in B und C die Perpen-

dikel BG und CF, bis sie die HM oder ihre Verlängerung in G und F treffen.

Da sowohl LA als HK auf AC senkrecht stehen; so ist LA ll BH. Es ist aber auch LA = BH; also ist (Art. 131)

Quadrat ACML = Rechteck ABED + BCFG.

Man mache BT = AB und ziehe TS ll AB; so ist ABTS ein Quadrat, und zwar das Quadrat von AB. STED ist ein Rechteck.

Eben so mache man BV = BC und ziehe VW ll BC; so ist BCWV das Quadrat von BC, und VWFG ist ein Rechteck.

In dem Rechteck DETS ist DE = AB.

Ferner ist W. DAB — LAB = LAC — LAB oder W. DAL = OAC, überdem ist W. LDA = COA und AL = AC; also △ LDA ≌ COA; mithin AD = AO; daher auch BE = AO; folglich BE — BT = AO — AB, oder ET = BO.

Die beyden Seiten des Rechtecks DETS sind also den Linien AB und BO gleich.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß die beyden Seiten des Rechtecks VWFG den Linien BC und PB gleich sind.

Nun ist

Rechteck ABED + Rechteck BCFG
= Quadrat ABTS + Quadr. BCWV
+ Rechteck STED + Rechteck VWFG

folglich

Quadrat ACML = Qu. ABTS + Qu. BCWV
+ Rechteck STED + R. VWFG.

(S. unten Anm. 2 zu Art. 136).

Anm. Da sich Parallelogramme wie die Producte aus Grundlinie und Höhe verhalten (§. 68), so läßt sich obiger Satz auch so ausdrücken:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.\ BO + CB.\ BP.$$

Nun haben aber die beyden Dreyecke ABP und CBO gleiche Winkel, sind also (§. 85) einander ähnlich, also verhält sich

$$AB : BP = CB : BO$$

daher ist

$$AB. BO = CB. BP$$

folglich

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2. AB. BO.$$

(Euklid II. Satz 12).

Art. 136. Lehrs. In jedem Dreyeck ist das Quadrat einer Seite, die einem spitzen Winkel gegen über steht, kleiner als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten; und zwar um die beyden Rechtecke zwischen der dem spitzen Winkel anliegenden Seite und ihrer bis zu dem, aus der gegen über liegenden Ecke auf sie gefällten, Perpendikel reichenden Abschnitte [Art. 131 und 133].

Bew. (Fig. 146 und 147). Im △ ABC liege die Seite AC einem spitzen Winkel ABC gegen über; und es sey AP senkrecht auf BC oder deren Verlängerung, und CO senkrecht auf BA oder deren Verlängerung; so ist zu beweisen, daß das Quadrat von AC kleiner ist als die Quadrate von AB und BC, und zwar um die beyden Rechtecke zwischen AB und BO und zwischen BC und BP.

Man beschreibe über AC das Quadrat ACML, fälle aus B das Perpendikel BK auf AC oder deren Verlängerung, verlängere dasselbe über B hinaus und mache BH = AL. Ferner ziehe man HL und errichte in A und B auf AB die Perpendikel AD und BE bis sie die HL oder ihre Verlängerung in E und D treffen. Eben so ziehe man HM, und errichte in B und C die Perpendikel BG und CF bis sie die HM oder ihre Verlängerung in G und F treffen.

Da sowohl LA als HK auf AC senkrecht stehen; so ist LA ‖ BH. Es ist aber auch LA = BH; also ist:

Erster Fall, wenn die beyden Rechtecke ABED und BCFG nach außen liegen (wie Fig. 146), nach Art. 131,

Quadr. ACML = Rechteck BCFG + R. ABED.

Es ist nun W. DAB — LAB = LAC — LAB oder W. DAL = BAC, ferner W. ADL = AOC und AL = AC,

also $\triangle$ LAD $\cong$ CAO; daher AD = AO. Es ist also, da AO $<$ AB ist, auch AD $<$ AB.

Man verlängere AD über D hinaus, und mache AS = AB, und ziehe ST ∥ AB bis sie die Verlängerung von BE in T trifft; so ist ABTS ein Quadrat, und zwar das Quadrat von AB. STED ist ein Rechteck.

Auf dieselbe Art wird aus der Congruenz der beyden Dreyecke MCF und ACP bewiesen, daß CF = CP, also CF $<$ CB ist. Man verlängere CF über F hinaus, und mache CW = CB, ziehe WV ∥ BC bis sie die Verlängerung von BG in V trifft, so ist BCWV das Quadrat von BC, und VWFG ist ein Rechteck.

In dem Rechteck STED ist DE = AB. Ferner ist AS — AD = AB — AO, also SD = OB. Die beyden Seiten des Rechtecks STED sind also den Linien AB nnd BO gleich.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß die beyden Seiten des Rechtecks VWFG den Linien BC und BP gleich sind.

Nun ist

Rechteck BCFG + Rechteck ABED
= Quadrat BCWV + Quadrat ABTS
— Rechteck VWFG — Rechteck STED

folglich

Quadrat ACML
= Quadrat BCWV + Quadrat ABTS
— Rechteck VWFG — Rechteck STED.

Zweyter Fall. Es kann aber auch von den beyden Rechtecken der den spitzen Winkel ABC einschließenden Seiten BC und BA das kleinere ABED der Seite BA nach innen liegen (wie Fig. 147), wenn nämlich die andere Seite BC einem stumpfen Winkel BAC gegen über liegt. Dann ist, nach Art. 133,

Quadrat ACML = Rechteck BCFG — R. ABED.

Es ist nun W. BCF — BCM = ACM — BCM, oder

W. FCM = PCA, ferner W. MFC = APC und Seite CM = CA, also △ MCF ≅ ACP; daher CF = CP.

Da nun CP < BC ist, so ist auch CF < CB. Man verlängere CF über F hinaus, mache CW = CB, und ziehe WV ll CB bis sie die Verlängerung von BG in V trifft, so ist BCWV ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Seite BC. GFWV ist ein Rechteck.

Ferner verlängere man DA über A hinaus, mache AS = AB, und ziehe ST ll AB bis sie die Verlängerung von EB in T trifft; so ist ABTS das Quadrat der Seite AB und DETS ist ein Rechteck.

In dem Rechteck GFWV ist GF = BC. Ferner ist CW — CF = CB — CP oder WF = BP. Die beyden Seiten des Rechtecks GFWV sind also den Linien BC und BP gleich.

In dem Rechteck DETS ist DE = AB. Ferner ist W. LAC — DAC = DAO — DAC, oder W. LAD = CAO, auch ist W. ADL = AOC und AL = AC, also △ LAD ≅ CAO; daher AD = AO. Folglich ist SA + AD = BA + AO, oder SD = BO. Die beyden Seiten des Rechtecks DETS sind also den Linien AB und BO gleich.

Nun ist

Rechteck BCFG — Rechteck ABED
  = BCWV — GFWV — (EDST — ABST)
  = BCWV + ABST — GFWV — EDST.

Folglich

Quadrat ACML
  = Quadrat BCWV + Quadrat ABST
  — Rechteck VWFG — Rechteck STED.

Anm. 1. Man kann (vgl. Anm. zu Art. 135) obigen Satz auch so ausdrücken:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - BC.\,BP. - AB.\,BO.$$

Nun haben aber die beyden Dreyecke ABP und CBO gleiche Winkel, sind also (§. 85) einander ähnlich, also verhält sich

$$AB : BP = CB : BO$$

daher ist

$$BC. BP = AB. BO$$

folglich

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2. AB. BO.$$

(Euklid II. Satz 13).

Anm. 2. Der Lehrsatz Art. 131, bewiesen nach Fig. 138, ist die prop. 1. in Pappi Alexandrini mathematicarum collectionum libro 4to. Die Lehrsätze, Art. 133 erster Fall, 134, 135 und 136 erster Fall, sind Zugaben von Castillon (S. Propositions de Geometrie et de Trigonometrie elementaire, demontrées d'une maniere nouvelle, par Mr. de Castillon, in Mem. de Berlin. Année 1766, p. 354—357). Gilbert hat dieselben in sein Lehrgebäude der Geometrie, p. 298—303, aufgenommen. — Der Fall, wo die beyden Parallelogramme nach innen gezeichnet sind (Art. 132, Fig. 139 und 140) kann nicht auf dieselbe Art bewiesen werden, wie der Fall, wo beyde Parallelogramme nach außen gezeichnet sind, wenigstens ist jener Fall nicht in den Beweisen des Pappus, Castillon oder Gilbert mit enthalten (s. Anm. zu Art. 132). Eben so ist der Fall (Art. 133), wo das nach innen beschriebene Parallelogramm ABED (Fig. 142) größer als das nach außen beschriebene BCFG ist, und der Fall (Art. 136), wo das △ ABC stumpfwinklig ist (Fig. 147), in den Beweisen des Castillon und Gilbert nicht mit begriffen. — Eine gründliche Behandlung eines solchen Lehrsatzes nach allen möglichen Fällen, und mit allen möglichen Folgerungen [was ebenfalls außer dem Zweck meiner Arbeit lag] kann, beyläufig gesagt, sehr gut und schicklich für Schüler von Gymnasien als Thema zu einer Preisaufgabe, das die Kräfte der jugendlichen Arbeiter nicht übersteigt, gebraucht werden.

Zu §. 69.

Dieser § enthält den Satz, a) daß Dreyecke von einerley Grundlinie und einerley Höhe gleich groß sind.

Jedes Dreyeck läßt sich nämlich durch Ansetzung eines ihm congruenten Dreyecks, so daß der Grundlinie jenes die gleiche Seite dieses, und einer zweyten Seite jenes die gleiche Seite dieses gegen über steht, die dritte Seite aber beyden Dreyecken gemeinschaftlich ist, zu einem Parallelogramm ergänzen, das zweymal so groß als das Dreyeck ist, und das mit dem Dreyeck dieselbe Grundlinie und Höhe hat. Die Grundlinie beyder ist nämlich gemeinschaftlich, und die Höhe beyder ist das Perpendikel aus des Dreyecks Spitze auf die Grundlinie.

Wenn nun zwey Dreyecke gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben, so haben die auf die eben angegebene Art construirten Parallelogramme mit den Dreyecken gleiche Grundlinie und gleiche Höhe. Diese beyden Parallelogramme haben also auch unter einander gleiche Grundlinie und gleiche Höhe, sind folglich (§. 65) einander gleich.

Folglich sind auch ihre Hälften, oder die Dreyecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe einander gleich.

Dieser Satz läßt sich auf folgende Art umkehren:

b) Dreyecke von einerley Inhalt und einerley Grundlinie haben einerley Höhe; und

c) Dreyecke von einerley Inhalt und einerley Höhe haben einerley Grundlinie.

Unter dem Satze a ist auch der allgemeine Satz enthalten:

d) Dreyecke auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallellinien sind einander gleich. Denn solche Dreyecke haben einerley Höhen. Die Höhen sind nämlich die Perpendikel aus den Spitzen auf die Grundlinie, und diese Perpendikel sind als Parallellinien zwischen Parallellinien (oder als gegen über liegende Seiten des Parallelogramms) einander gleich.

Dieser letzte Satz läßt sich wieder umkehren:

e) Dreyecke auf derselben Grundlinie und von demselben Inhalt stehen zwischen denselben Parallellinien. Denn diese Dreyecke haben (nach b)

einerley Höhen. Denken wir uns diese Höhen als Perpendikel aus ihren Spitzen auf die Grundlinie gezogen, so sind dieselben einander gleich und parallel (§. 19. c.), schließen also mit den geraden Linien, welche ihre Endpunkte verbinden, ein Parallelogramm ein (§. 59). Eine dieser geraden Linien fällt aber mit der Grundlinie zusammen, und die andere ist die gerade Linie, welche die Spitzen verbindet. Die letzte ist also der ersten parallel.

Anwendung von dem Satze e wird in den beyden nachfolgenden Artikeln gemacht.

Art. 137. Lehrs. Jedes Viereck, das durch eine jede seiner beyden Diagonalen in zwey congruente Dreyecke getheilt wird, ist ein Parallelogramm.

Bew. (Fig. 73). Das Viereck ABCD sey durch die Diagonale AC in die beyden congruenten Dreyecke ACB und ACD, und durch die Diagonale BD in die beyden congruenten Dreyecke BDA und BDC getheilt; so ist

$$\triangle DCA = \tfrac{1}{2} ABCD$$

und

$$\triangle DCB = \tfrac{1}{2} ABCD$$

mithin

$$\triangle DCA = \triangle DCB.$$

Die beyden Dreyecke DCA und DCB haben also gleichen Inhalt und die gemeinschaftliche Grundlinie DC; die gerade Linie AB, in welcher ihre Spitzen A und B liegen, ist also der Grundlinie DC parallel.

Eben so läßt sich beweisen, daß AD ‖ BC ist.

Folglich ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm (§. 25). (Clavius, p. 66; nach Campanus).

Art. 138. Lehrs. Die gerade Linie, welche zwey Seiten eines Dreyecks in zwey gleiche Theile theilt, ist der dritten Seite parallel.

Bew. (Fig. 148). Die Linie DE halbire die beyden Seiten AB und AC in D und E. Man ziehe BE und DC.

Die Höhe der beyden Dreyecke ADE und DBE ist das Perpendikel aus E auf AB, wenn man AD und BD als ihre Grundlinien betrachtet. Da nun überdem AD = BD ist (Vorauss.), so haben die beyden Dreyecke gleiche Grundlinien und gleiche Höhen. Es ist also (§. 69)

△ ADE = △ BDE.

Betrachtet man AE und EC als die Grundlinien der Dreyecke AED und ECD, so ist das Perpendikel aus D auf AC die beyden Dreyecken gemeinschaftliche Höhe. Da nun überdem AE = EC ist (Vorauss.), so haben die beyden Dreyecke gleiche Grundlinien und gleiche Höhen. Es ist also ebenfalls (§. 69)

△ ADE = △ ECD.

Daher ist

△ BDE = △ ECD.

Die beyden Dreyecke BDE und ECD haben nun die Grundlinie ED mit einander gemein. Da sie überdem gleichen Inhalt haben; so haben sie auch gleiche Höhen oder liegen zwischen denselben Parallellinien. Folglich ist

BC ll DE.

(Clavius p. 66; nach Campanus).

Art. 139. Lehrs. Die gerade Linie, welche zwey Seiten eines Dreyecks in zwey gleiche Theile theilt, ist der dritten Seite Hälfte [Art. 138].

Bew. (Fig. 149). Die Linie DE halbire die beyden Seiten AB und AC in D und E, so ist zu beweisen, daß DE = $\frac{1}{2}$ BC ist.

Man halbire auch BC in F und ziehe EF.

Da DE die beyden Seiten AB und AC halbirt, so ist DE ll BC, oder DE ll BF (Art. 138).

Und da EF die beyden Seiten CA und CB halbirt, so ist auch EF ll AB, oder EF ll BD (Art. 138).

Also ist BDEF ein Parallelogramm (§. 25). Mithin DE = BF.

Nun ist BF = $\frac{1}{2}$ BC.

Folglich ist auch

DE = $\frac{1}{2}$ BC.

Art. 140. Lehrs. Die gerade Linie, welche durch die Mitte einer Seite, nach der zweyten Seite, parallel mit der dritten gezogen wird, theilt die zweyte Seite ebenfalls in zwey gleiche Theile.

Bew. (Fig. 149). Im △ ABC sey durch die Mitte D der Seite AB die gerade Linie DE nach der zweyten Seite AE so gezogen, daß sie der dritten Seite BC parallel ist, so ist zu beweisen, daß AE = EC ist.

Man ziehe DF ll AC, so ist DECF ein Parallelogramm (§. 25), also DF = EC (§. 56).

Ferner ist AD = DB (Voraussf.), W. ADE = DBF, und W. DAE = BDF (§. 16), also △ ADE ≅ DBF (§. 40), mithin AE = DF.

Da nun auch EC = DF ist; so ist EC = AE.

Nach §. 72.

Theilung der geraden Linie in gleiche Theile.
(Fortsetzung des Abschn. S. 279).
Art. 141 bis 143.

Art. 141. Lehrs. Wenn in einem Dreyeck eine gerade Linie mit einer Seite desselben parallel gezogen ist, so theilt die aus der gegen über liegenden Ecke gezogene gerade Linie, welche die eine von beyden Parallellinien halbirt, auch die andere in zwey gleiche Theile.

Bew. (Fig. 150 und 151). In dem Dreyeck ABC sey DE ll BC, und es theile

1. die gerade Linie AF die Seite BC in zwey gleiche Theile BF und FC; so ist zu beweisen, daß auch DE durch dieselbe in G halbirt wird.

Man ziehe DF und EF (Fig. 150), so ist

△ BAF = FAC (§. 69)

und

$$\triangle\, BFD = FCE \text{ (§. 69)}$$

also

$$\triangle\, BAF - BFD = FAC - FCE$$

oder

$$\triangle\, AFD = AFE.$$

Betrachtet man AF als die gemeinschaftliche Grundlinie der beyden Dreyecke AFD und AFE, so haben sie auch gleiche Höhen, weil sie sonst nicht gleichen Inhalt haben könnten.

Die Höhen dieser beyden Dreyecke sind aber auch die Höhen der beyden Dreyecke AGD und AGE, wenn man AG als deren gemeinschaftliche Grundlinie betrachtet.

Die beyden Dreyecke AGD und AGE sind also einander gleich.

Betrachtet man DG und GE als die Grundlinien der beyden Dreyecke AGD und AGE, so liegen beyde Grundlinien auf derselben geraden Linie DE. Beyde Dreyecke haben zugleich ihre gemeinschaftliche Spitze in A; sie haben also gleiche Höhen.

Da sie einander gleich sind und gleiche Höhen haben, so sind folglich auch ihre Grundlinien einander gleich; oder es ist

$$DG = GE.$$

2. Die gerade Linie DF theile die der Seite BC parallele Linie DE in die beyden gleichen Theile DG und GE; so ist zu beweisen, daß auch BC durch dieselbe in F halbirt wird.

Man ziehe GB und GC (Fig. 151), so ist

$$\left.\begin{array}{l}\triangle\, ADG = AGE \\ \text{und} \quad \triangle\, DGB = GEC\end{array}\right\} \text{§. 69.}$$

also

$$\triangle\, ADG + DGB = AGE + GEC$$

oder

$$\triangle\, ABG = ACG.$$

Betrachtet man AG als die gemeinschaftliche Grundlinie der beyden gleichen Dreyecke ABG und ACG, so müssen sie auch gleiche Höhen haben.

Die Höhen dieser beyden Dreyecke sind aber auch die Höhen der beyden Dreyecke AFB und AFC, wenn man AF als die gemeinschaftliche Grundlinie derselben ansieht.

Es sind also die beyden Dreyecke AFB und AFC einander gleich.

Betrachtet man BF und FC als die Grundlinien dieser beyden Dreyecke, so liegen dieselben auf einer geraden Linie BC. Beyde Dreyecke haben zugleich ihre gemeinschaftliche Spitze in A. Sie haben also gleiche Höhen.

Da sie nun gleiche Höhen und gleichen Inhalt haben, so müssen auch ihre Grundlinien einander gleich seyn. Oder es ist

BF = FC.

Anm. 1. Des einen der beyden Theile des Beweises kann man sich überheben, wenn man den Fall, den man bewiesen hat, umkehrt. Es sey z. B. obiger erster Theil bewiesen; so folgt daraus umgekehrt, daß die gerade Linie, welche die DE in G halbirt, auch mitten durch BC geht. Denn wäre nicht F, sondern etwa h in der Mitte von BC, und man zöge die Linie Ah, so müßte diese, nach dem ersten Theile des Beweises, mitten durch DE gehen. Es können also Ah und AF keine zwey von einander verschiedene gerade Linien seyn, und h und F keine zwey von einander verschiedene Punkte. Die gerade Linie, welche die DE halbirt, geht also in F mitten durch BC.

Anm. 2. Man hätte in Fig. 150 aus D und E auch wirklich die Perpendikel Dx und Ey auf AF fällen, und, nachdem man die Gleichheit beyder Höhen bewiesen hat, die Gleichheit der beyden Linien DG und GE aus der Congruenz der Dreyecke DGx und GEy ableiten können.

Eben so konnte man in Fig. 151 aus B und C die Perpendikel Bz und Cv auf AF und deren Verlängerung wirklich fällen.

Art. 142. Aufg. Eine gegebene gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen [Art. 141].

Aufl. (Fig. 152). Es sey AB die gegebene gerade Linie, die z. B. in fünf gleiche Theile getheilt werden soll.

Man ziehe durch den einen Endpunkt B eine beliebige gerade Linie BC; nehme auf BC einen beliebigen Punkt D an, entweder unterhalb oder oberhalb B, und ziehe DE ǁ AB. Auf DE schneide man fünf unter sich gleiche Stücke DF, FG, GH, HI, IE ab, doch so, daß, wenn der Punkt D unterhalb B liegt, die Summe derselben > AB, hingegen wenn der Punkt D oberhalb B liegt, diese Summe < AB sey, damit, wenn man durch den andern Endpunkt A der gegebenen Linie und durch den Punkt E eine gerade Linie zieht, diese die BC in einem Punkte C durchschneiden könne.

Aus diesem Punkte C ziehe man nun die geraden Linien CF, CG, CH, CI, welche die gegebene AB in den Punkten K, L, M, N durchschneidet; so wird dadurch AB in die fünf gleichen Theile BK, KL, LM, MN, NA getheilt.

Bew. Da in dem △ CBL die gerade Linie DG der Seite BL, oder im △ CDG die gerade Linie BL der Seite DG parallel gezogen, und da DG in die beyden gleichen Theile DF und FG getheilt ist: so ist durch die gerade Linie CF auch BL in die beyden gleichen Theile BK und KL getheilt. (Art. 141).

Eben so wird bewiesen, daß KM in die beyden gleichen Theile KL und LM getheilt ist.

Es sind also die drey Theile BK, KL und LM unter einander gleich.

U. s. w.

Anm. Diese Auflösung der Aufgabe, eine gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, ist aus Clavius p. 69. Sie hat das Empfehlende, daß sie die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke nicht voraussetzt.

Der Lehrsatz Art. 141 dient dieser Aufgabe als Hülfssatz. Der Beweis, den Clavius von jenem Lehrsatze gibt, ist viel weitläufiger als der von mir mitgetheilte. Ich glaubte, den des Clavius weglassen zu müssen, da der Lehrsatz für sich weiter

kein Interesse hat, und sich noch andere Auflösungen der hier darauf gebauten Aufgabe, ohne diesen Lehrsatz, Art. 118 bis 120 finden.

Art. 143. Aufg. Wie Art. 142; [Art. 141].

Aufl. (Fig. 153). AB sey die gegebene gerade Linie, welche z. B. in fünf gleiche Theile getheilt werden soll.

Man ziehe eine beliebige gerade Linie CI und schneide darauf fünf unter sich gleiche Stücke CD, DE, EF, FG, GH ab, beschreibe über CH ein gleichseitiges Dreyeck CHK, nehme, von K aus, KL = KM = AB und ziehe LM; so ist LM = der gegebenen Linie AB.

Zieht man nun die geraden Linien KD, KE, KF, KG, welche die LM in den Punkten N, P, Q, R durchschneiden; so wird LM, also auch AB, in die fünf gleichen Theile LN, NP, PQ, QR, RM getheilt.

Bew. In dem gleichseitigen Dreyeck CHK ist der W. K = C = H = $\frac{2}{3}$ R. (§. 50).

Da also in dem △ KLM der W. K = $\frac{2}{3}$ R. ist, so sind die beyden Winkel L + M = $\frac{4}{3}$ R.

Es ist aber KL = KM, also das △ LKM gleichschenklig, also W. L = M = $\frac{2}{3}$ R.

Daher ist, da auch W. C = $\frac{2}{3}$ R. ist, der W. L = C, also LM ‖ CH (§. 19).

In dem △ CEK ist nun LP ‖ CE, und die Linie CE durch KD in die beyden gleichen Theile CD und DE getheilt; also zerfällt dadurch LP auch in die beyden gleichen Theile LN und NP (Art. 141).

Eben so wird bewiesen, daß NP = PQ ist, u. s. w.

Es ist also die Linie LM in fünf gleiche Theile getheilt.

Da das △ KLM lauter gleiche Winkel hat, so ist es gleichseitig, also LM = LK = der gegebenen AB.

Es ist folglich auch AB in fünf gleiche Theile getheilt.

Anm. Wäre CH < AB (wiewohl man die Stücke auf CI leicht so nehmen kann, daß sie zusammen größer als AB

werden); so müßte man KC und KH über C und H hinaus verlängern, u. s. w.

Halbirung von Dreyecken und Parallel-Trapezen. Art. 144 bis 148.

Art. 144. Aufg. Ein Dreyeck durch eine gerade Linie von einem gegebenen Punkte auf einer seiner Seiten aus in zwey gleiche Theile zu theilen.

Aufl. (Fig. 154). Das △ ABC sey von dem Punkt D, auf der Seite BC, aus in zwey gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe DA.

Wäre D in der Mitte von BC, so wären DAB und DAC die beyden gleichen Theile.

Wenn aber D nicht in der Mitte von BC ist, so halbire man BC in E, ziehe EF ∥ DA, und ziehe DF, so sind DFC und DFAB die beyden verlangten Theile.

Bew. Man ziehe AE, so ist

$$\triangle\ AFE = DFE\ (\S.\ 69)$$

also

$$\triangle\ DFE + FEC = AFE + FEC$$

oder

$$\triangle\ DFC = AEC$$

Nun ist aber $\triangle\ AEC = \frac{1}{2}\ ABC$ (§. 70). Folglich ist auch

$$\triangle\ DFC = \frac{1}{2}\ ABC$$

Mithin ist auch

$$DFAB = \frac{1}{2}\ ABC$$

Folglich

$$DFAB = \triangle\ DFE.$$

(Clavius p. 65; aus Peletarius).

a. Aufg. Ein Dreyeck durch eine gerade Linie aus einer Ecke desselben in zwey gleiche Theile zu theilen.

b. Aufg. Ein Dreyeck durch gerade Linien aus einer Ecke desselben in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Art. 145. Aufg. Ein Parallel-Trapez durch eine gerade Linie aus einer Ecke der kleineren unter den beyden parallelen Seiten in zwey gleich große Theile zu theilen.

Aufl. (Fig. 155). ABCD sey ein Parallel-Trapez, CD die kleinere der beyden parallelen Seiten.

Man schneide auf der größeren der beyden parallelen Seiten das Stück BE = DC ab, halbire AE in F (§. 62) und ziehe CF; so sind ADCF und FCB die beyden gesuchten Theile.

Bew. Man ziehe die Diagonale AC und die gerade EC. Die beyden Dreyecke ADC und CBE haben gleiche Grundlinien DC und EB, und, da sie zwischen denselben Parallellinien liegen, auch gleiche Höhen, nämlich das Perpendikel, das zwischen beyden Parallellinien gezogen wird. Also ist (§. 69)

$$\triangle\ ADC = CBE.$$

Eben so (§. 69) ist

$$\triangle\ AFC = FEC$$

mithin

$$\triangle\ ADC + AFC = CBE + FEC$$

oder

Parallel-Trapez ADCF = $\triangle$ FCB.

Art. 146. Aufg. Ein Parallel-Trapez durch eine gerade Linie aus einer Ecke der größeren unter den beyden parallelen Seiten in zwey gleich große Theile zu theilen.

Aufl. (Fig. 155). ABCD sey ein Parallel-Trapez, AB die größere unter den beyden parallelen Seiten.

Man ziehe die Diagonale AC. Ferner schneide man auf derselben ein Stück BE = der kleineren DC der beyden parallelen Seiten ab; halbire AE in F, ziehe der AC parallel die FG, welche die BC in G trifft, und ziehe AG: so sind ADCG und AGB die beyden verlangten Theile.

Bew. Man ziehe CE und CF.

Die beyden Dreyecke ADC und CBE haben gleiche Grundlinien DC und EB, und, da sie zwischen denselben Parallel-

linien DC und AB liegen, auch gleiche Höhen. Also ist (§. 69)

$$\triangle\ ADC = CBE.$$

Eben so ist (§. 69)

$$\triangle\ AFC = FEC$$

mithin

$$\triangle\ ADC + AFC = CBE + FEC$$

oder

$$ADCF = FCB.$$

Daher ist

$$ADCF = \frac{1}{2}\ ABCD.$$

Die beyden Dreyecke ACF und ACG stehen nun auf derselben Grundlinie AC und zwischen denselben Parallellinien AC und FG, also ist (§. 69)

$$\triangle\ ACG = \triangle\ ACF$$

also auch

$$\triangle\ ADC + ACG = ADC + ACF$$

oder

$$ADCG = ADCF.$$

Folglich ist auch

$$ADCG = \frac{1}{2}\ ABCD$$

folglich auch

$$ABG = ADCB - ADCG = \frac{1}{2}\ ABCD.$$

Art. 147. Lehrs. Wenn auf einer der beyden nicht parallelen Seiten eines Parallel-Trapezes ein Dreyeck steht, das seine Spitze auf der Mitte der gegen über liegenden Seite hat, so ist das Dreyeck die Hälfte des Trapezes.

Bew. (Fig. 156). In dem Parallel-Trapez ABCD seyen AD und BC die beyden nicht parallelen Seiten; das △ ADE stehe auf AD als Grundlinie, und habe seine Spitze E in der Mitte der gegen über liegenden Seite BC.

Man verlängere AE und DC bis sie sich in F durchschneiden, so ist CE = EB (Vorauss.), W. ECF = EBA (§. 17) und W. CEF = BEA, also △ CEF ≌ BEA.

Mithin ist

$$ADCE + ECF = ADCE + BEA$$

oder

$$\triangle ADF = \text{Trapez } ABCD.$$

Aus der Congruenz der beyden Dreyecke CEF und BEA folgt aber auch, daß EF = AE, also das Dreyeck ADE die Hälfte des △ ADF ist.

Folglich ist △ ADE auch die Hälfte des Trapezes ABCD. (Clavius p. 71).

Art. 148. Lehrs. Wie Art. 147.

Bew. (Fig. 156). (Voraussetzung, wie Art. 147).

Man ziehe durch E die HG ll AD, bis sie die längere AB der beyden parallelen Seiten in H, und die Verlängerung der kürzeren DC in G trifft; so ist ADGH ein Parallelogramm. Ferner ist EB = EC (Vorauss.), W. CEG = BEH (§. 14) nnd W. ECG = EBH (§. 17), also △ CEG ≅ EBH.

Nimmt man nun von dem Parallel-Trapez ABCD das △ EBH weg und fügt dafür das ihm congruente Dreyeck CEG hinzu, so erhält man das Parallelogramm ADGH. Also ist

$$\text{Parallelogr. } ADGH = \text{Paralleltr. } ABCD.$$

Das △ ADE hat nun mit dem Parallelogramm ADGH die Grundlinie AD gemein, und, da seine Spitze E in der gegen über liegenden Seite HG des Parallelogrammes liegt, so hat es mit demselben auch gleiche Höhe; das △ ADE ist also halb so groß als das Parallelogramm ADGH. Folglich ist es auch halb so groß als das Parallel-Trapez ABCD.

Parallelogramm, dessen Ecken auf den Mitten der Seiten des Trapezes. Art. 149 bis 153.

Art. 149. Lehrs. Wenn man alle Seiten irgend eines Vierecks halbirt und die Halbirungspunkte je zweyer Seiten, welche an einander stoßen, durch gerade Linien verbindet, so bilden diese stets ein Parallelogramm, dessen Seiten mit den Diagonalen des gegebenen Vierecks parallel sind [Art. 138].

Bew. (Fig. 157). Die Seiten AB, BC, CD und DA des Vierecks ABCD seyen in E, F, G und H halbirt; und es seyen die geraden Linien EF, FG, GH und HE gezogen; so ist zu beweisen, daß EFGH ein Parallelogramm sey, dessen Seiten mit den Diagonalen AC und BD des Vierecks parallel laufen.

Da in dem △ ABC die Seiten AB und BC in E und F halbirt sind, so ist EF der dritten Seite AC parallel (Art. 138).

Eben so wird bewiesen, daß HG ∥ AC ist.

Daher ist auch EF ∥ HG.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß GF und HE der Diagonale BD, also auch unter einander parallel sind.

Mithin ist EFGH ein Parallelogramm, dessen Seiten den Diagonalen des gegebenen Vierecks parallel sind.

(Gilbert S. 267).

Art. 150. Lehrs. Das Parallelogramm, welches (nach Art. 149) entsteht, wenn man die vier Seiten eines gegebenen Vierecks halbirt, und die Halbirungspunkte je zweyer Seiten, welche an einander stoßen, durch gerade Linien verbindet, ist

1. ein Quadrat, wenn das gegebene Viereck ein Quadrat,
2. ein Rechteck, wenn das gegebene Viereck ein Rhombus,
3. ein Rhombus, wenn das gegebene Viereck ein Rechteck, und
4. ein Rhomboides, wenn das gegebene Viereck ein Rhomboides ist.

(Die vier besonderen Figuren, die hier entsprechen, kann sich der Leser leicht selbst zeichnen. Wir bedienen uns zum Beweise der allgemeinen Figur).

Bew. (Fig. 157).

1. Wenn das gegebene Viereck ABCD ein Quadrat ist.

Da EB = BF = FC = CG und W. B = C ist, so ist △ EBF ≌ FCG, also EF = FG. Es sind also alle vier Seiten des Parallelogramms EFGH unter einander gleich.

Da EB = BF ist, so ist das △ EBF gleichschenklig, also W. BFE = BEF (§. 43). Da nun W. B ein rechter ist, so ist auch W. BFE + BEF = 1 R.; folglich W. BFE = ½ R.

Eben so wird bewiesen, daß W. GFC = ½ R. ist.

Daher ist

W. GFE = 2 R. — BFE — GFC = 1 R.

Das Parallelogramm EFGH hat demnach lauter gleiche Seiten und lauter rechte Winkel; ist folglich ein Quadrat.

2. Wenn das gegebene Viereck ABCD ein Rhombus ist.

Da der Rhombus schiefe Winkel hat, so daß von zwey auf einander folgenden Winkeln der eine ein spitzer und der andere sein stumpfer Nebenwinkel ist (§. 18); so sey der W. B spitz und der W. C stumpf.

Da in den beyden Dreyecken EBC und FCG die Seite EB = BF = FC = CG, aber W. B < W. C ist, so ist auch EF < FG (§. 54). Das Parallelogramm EFGH hat also nur die gegen über liegenden Seiten gleich.

Ferner ist, da die drey Winkel eines jeden Dreyecks zusammen 2 R. betragen,

W. B + C + BEF + BFE + CFG + CGF = 4 R.

Nun ist

W. B + C = 2 R. (§. 18)

also ist auch noch

W. BFE + CFG + BEF + CGF = 2 R.

Da nun die Dreyecke EFB und GFC gleichschenklig sind, so ist

W. BFE = BEF

und

W. CFG = CGF

also

W. BFE + CFG = BEF + CGF

mithin

W. BFE + CFG = 1 R.

Folglich ist auch

$$\text{W. EFG} = 2\ \text{R.} - (\text{BFE} + \text{CFG}) = 1\ \text{R.}$$

Das Parallelogramm EFGH hat demnach lauter rechte Winkel, und nur die gegen über stehenden Seiten gleich; ist folglich ein Rechteck.

3. Wenn das gegebene Viereck ABCD ein Rechteck ist.

Da im Rechteck die zwey an einander liegenden Seiten ungleich sind, so sey AB > BC; also auch EB > BF.

Nun ist EB = GC, BF = CF und W. B = C, also △ EBF ≅ GCF; mithin EF = GF.

Das Parallelogramm EFGH hat also die an einander liegenden Seiten gleich, folglich lauter gleiche Seiten.

Da ferner im △ EBF die Seite EB > BF ist, so ist auch W. EFB > FEB (§. 51); und da W. B ein rechter, also auch W. EFB + FEB = 1 R. ist, so ist W. EFB > $\frac{1}{2}$ R.

Eben so ist W. GFC > $\frac{1}{2}$ R.

Mithin

$$\text{W. EFB} + \text{GFC} = 1\ \text{R.}$$

Da nun W. GFE mit EFB + GFC zusammen 2 R. ausmacht, so ist

$$\text{W. GFE} < 1\ \text{R.}$$

Das Parallelogramm EFGH hat also schiefe Winkel.

Da es überdem gleiche Seiten hat, so ist es folglich ein Rhombus.

4. Wenn das gegebene Viereck ABCD ein Rhomboides ist.

Da im Rhomboides die zwey an einander liegenden Seiten ungleich und die Winkel schief sind; so sey BC > AB und B ein stumpfer, also C ein spitzer Winkel.

Da EB = GC, BF = CF, aber W. EBC > GCF ist, so ist (§. 54) EF > GF. Im Parallelogramm EFGH sind also die an einander liegenden Seiten ungleich.

Da ferner die Winkel eines jeden Dreyecks zusammen 2 R. betragen, so ist

W. B + C + BEF + BFE + CGF + CFG = 4 R.

Nun ist

W. B + C = 2 R. (§. 18)

also ist auch noch

W. BFE + CFG + BEF + CGF = 2 R.

Da nun BC > AB ist (nach der Vorauss.), so ist auch $\frac{1}{2}$ BC > $\frac{1}{2}$ AB, oder BF > EB. Im △ EBF steht also der W. BFE einer kleineren Seite gegen über, als der W. BEF, folglich ist (§. 51)

W. BFE < W. BEF.

Eben so wird bewiesen, daß

W. CFG < W. CGF

ist. Mithin ist auch

W. BFE + CFG < W. BEF + CGF

also ist

W. BFE + CFG < 1 R.

Da nun W. EFG mit W. BFE + CFG zusammen 2 R. ausmacht, so bleibt

W. EFG > 1 R.

Das Parallelogramm EFGH hat also schiefe Winkel.

Da es überdem nur die gegen über liegenden Seiten gleich hat, so ist es folglich ein Rhomboides.

Anm. Obiger Lehrsatz besteht eigentlich aus vier Lehrsätzen, welche nach Gutdünken einzeln den Schülern aufgegeben werden können. Diese vier Lehrsätze können auch ohne Voraussetzung des Art. 138 bewiesen werden. Dann heißen diese vier Lehrsätze, deren Beweis nunmehr dem Leser überlassen wird, also:

1. Wenn man alle Seiten eines Quadrats halbirt, und die Halbirungspunkte je zweyer Seiten, welche an einander stoßen, durch gerade Linien verbindet, so bilden diese wieder ein Quadrat.

2. Wenn man alle Seiten eines Rhombus halbirt, und die Halbirungspunkte je zweyer Seiten, welche an einander

stoßen, durch gerade Linien verbindet, so bilden diese ein Rechteck.

3. Wenn man alle Seiten eines Rechtecks halbirt, und die Halbirungspunkte je zweyer Seiten, welche an einander stoßen, durch gerade Linien verbindet, so bilden diese einen Rhombus.

4. Wenn man alle Seiten eines Rhomboides halbirt, und die Halbirungspunkte je zweyer Seiten, welche an einander stoßen, durch gerade Linien verbindet, so bilden diese wieder einen Rhomboides.

Art. 151. Lehrs. Wenn man alle Seiten eines Dreyecks halbirt, und die Halbirungspunkte durch gerade Linien verbindet; so zerfällt dadurch das gegebene Dreyeck in vier congruente Dreyecke. [Art. 139].

Bew. (Fig. 149). Die Seiten AB, AC und BC des △ ABC seyen in D, E und F halbirt, und es seyen die Linien DE, DF und EF gezogen: so ist (Art. 139)

$$DF \parallel AE \text{ und } FE \parallel AD$$

also ADFE ein Parallelogramm, mithin (§. 55)

$$\triangle ADE \cong FED.$$

Eben so wird bewiesen, daß BFED ein Parallelogramm, also

$$\triangle BDF \cong FED,$$

und daß DECF ein Parallelogramm, also

$$\triangle FEC \cong FED$$

ist.

Es sind folglich alle vier Dreyecke unter einander congruent. (Gilbert S. 266).

Art. 152. Lehrs. Das innere Viereck, welches entsteht, wenn man alle Seiten irgend eines gegebenen Vierecks halbirt, und die Halbirungspunkte je zweyer Seiten, welche an einander stoßen, durch gerade Linien verbindet, ist halb so groß als das gegebene Viereck. [Art. 151].

Bew. (Fig. 157). Die Seiten AB, BC, CD und DA des Vierecks ABCD seyen in E, F, G und H halbirt, und es seyen die Linien EF, FG, GH und HE gezogen.

Man ziehe noch die Diagonalen AC und BD.

Da in dem △ ACB die Seiten AB und BC in E und F halbirt sind, so ist (Art. 151) das △ EFB eins von den vier congruenten Dreyecken, welche man dadurch erhält, daß man die drey Seiten eines Dreyecks halbirt und die Halbirungspunkte durch gerade Linien verbindet. Es ist also

$$\triangle \text{ EFB} = \tfrac{1}{4} \triangle \text{ ACB}$$

Eben so ist

$$\triangle \text{ HGD} = \tfrac{1}{4} \triangle \text{ ACD}$$

also

$$\triangle \text{ EFB} + \text{HGD} = \tfrac{1}{4} \text{ ACB} + \tfrac{1}{4} \text{ ACD}$$
$$= \tfrac{1}{4} \text{ ABCD}.$$

Auf gleiche Art läßt sich beweisen, daß

$$\triangle \text{ EHA} + \text{FGC} = \tfrac{1}{4} \text{ ABCD}$$

ist.

Mithin ist

$$\triangle \text{ EFB} + \text{HGD} + \text{EHA} + \text{FGC} = \tfrac{1}{4} \text{ ABCD}$$
$$+ \tfrac{1}{4} \text{ ABCD} = \tfrac{1}{2} \text{ ABCD}.$$

Nimmt man die genannten vier Dreyecke von dem Vierecke ABCD weg, so bleibt noch

$$\text{EFGH} = \text{ABCD} - \tfrac{1}{2} \text{ ABCD}$$

oder

$$\text{EFGH} = \tfrac{1}{2} \text{ ABCD}.$$

(Gilbert S. 267).

Anm. 1. Noch andere Beweise dieses, Anfängern nicht unangenehmen, Satzes aufzufinden, wird dem Leser überlassen.

Anm. 2. De la Hire, in seiner Abhandlung: Propriétés des Trapezes, in den Mem. de l'Acad. de Paris, vom Jahr 1713 (p. 221—229), sagt, daß die Erfindung des Lehrsatzes Art. 149 dem Roberval, der in der Mitte des 17ten

Jahrhunderts lebte, zugeschrieben werde. Er selbst macht zu diesem Lehrsatz noch einige Bemerkungen:

a) In jedem Dreyeck kann man eine unendliche Menge von Parallelogrammen verfertigen, die alle unter einander gleich, und deren jedes die Hälfte des Dreyecks ist.

Wenn man nämlich in dem △ ACB (Fig. 157) die Seiten AB und BC in E und F halbirt, EF zieht, und ET und FS, in beliebiger Richtung gegen AC, unter einander parallel zieht, so wird EFST ein solches Parallelogramm. Der Beweis bleibt dem Leser überlassen.

b) Daraus leitet de la Hire den Beweis des Lehrsatzes Art. 152 her.

c) Ein besonderer Fall des Lehrsatzes Art. 152 ist der, wo das Viereck ABCD eine eingehende Ecke hat, wie, Fig. 158, die Ecke B. Auch jetzt ist Parallelogramm EFGH $= \frac{1}{2}$ ABCD. Denn verlängert man HE und GF nach T und S, so ist

$$\text{TSGH} = \tfrac{1}{2} \triangle \text{ADC} \text{ (nach Bem. a.)}$$

und

$$\text{TSFE} = \tfrac{1}{2} \triangle \text{ABC}$$

also

$$\text{TSGH} - \text{TSFE} = \tfrac{1}{2} \triangle \text{ADC} - \tfrac{1}{2} \triangle \text{ABC}$$

oder

$$\text{EFGH} = \tfrac{1}{2} \text{ABCD}.$$

Anm. 3. De la Hire theilt in der eben erwähnten Abhandlung noch 6 verschiedene Lehrsätze über das Trapez mit, deren Beweise zum Theil die Aehnlichkeit der Dreyecke voraussetzen. Diese Lehrsätze sind an sich wohl sehr interessant, verlieren aber als Material des Unterrichts dadurch viel an Interesse, daß sich ihre Proposition nur mit großer Weitschweifigkeit geben läßt. Von diesen 6 Lehrsätzen theile ich nur den ersten in dem nachfolgenden Art. mit.

Art. 153. Lehrs. Wenn man zwey gegen über liegende Seiten eines Trapezes verlängert bis sie sich durchschnei-

den, aus dem Durchschnittspunkt eine gerade Linie nach der Mitte der entfernteren Seite zieht, aus den Endpunkten der näheren Seite Parallellinien mit der entfernteren zieht, und durch die Durchschnittspunkte dieser mit jener geraden Linie andere gerade Linien parallel mit den verlängerten Seiten des Trapezes zieht: so durchschneiden die zuletzt gezogenen Linien einander auf der Mitte der jenem Durchschnittspunkt zunächst gelegenen Seite des Trapezes. [Art. 141 und 138].

Bew. (Fig. 159). ABCD sey ein Trapez. Die Seiten AD und BC, verlängert, durchschneiden sich in E. Aus dem Durchschnittspunkt E sey eine gerade Linie EF nach der Mitte F der entfernteren Seite AB gezogen. Aus den Ecken D und C der näheren Seite CD seyen die geraden Linien DG und CH ll AB gezogen; diese durchschneiden die CF in Punkten I und K. Durch I sey die gerade Linie IL ll BC und durch K die NM ll AD gezogen; so ist zu beweisen, daß der Durchschnittspunkt N der beyden Linien IL und NM auf der Seite DC liegt.

Wir wollen umgekehrt annehmen, N sey die Mitte von DC, und beweisen, daß, wenn wir durch N und I die IL und durch N und K die NM ziehen, jene der CB und diese der AD parallel sey.

Da in dem △ ABE die DG ll AB, und AB durch EF in F halbirt ist; so ist auch DG in I halbirt (Art. 141). In dem △ DCG sind nun die beyden Seiten DG und DC durch IN halbirt, also ist IN ll GC oder IL ll CB (Art. 138).

Da eben so in dem △ ABE die HC ll AB, und AB durch EF in F halbirt ist; so ist auch HC in K halbirt (Art. 141). In dem △ DCH sind nun die beyden Seiten CD und CH durch NK halbirt, also ist NK ll DH, oder NM ll DA (Art. 138).

Da es nun durch I nur eine gerade Linie gibt, die mit BC parallel ist, und durch K nur eine, die mit DA parallel ist; so gehen umgekehrt die durch I und K mit BC und DA parallel gezogenen geraden Linien durch den Punkt N.

Die beyden Linien ML und LI durchschneiden sich also auf der Mitte der Seite DC des Trapezes.

Anm. Zu den Erweiterungen oder Anwendungen des Satzes Art. 149 gehört noch die Bemerkung, wozu Metternich in seinen „geometrischen Abhandlungen über die Theilungen des Dreyecks durch drey Linien nach bestimmten Richtungen, die sich in einem einzigen Punkte schneiden; und über verschiedene Verwandlungen der Vierecke. Mainz 1821," S. 54 veranlaßt, daß sich dieser Lehrsatz auch umkehren lasse. Metternich bringt daher a. a. O. folgende Aufgabe bey:

Aufg. Um ein gegebenes Parallelogramm unzählig viele Vierecke zu beschreiben, deren Seiten die Winkelpunkte des Parallelogramms nicht nur berühren, sondern in diesen Punkten selbst wieder halbirt werden, und deren Inhalt das Doppelte des gegebenen Parallelogrammes werde.

Es kommt in der von Metternich gegebenen Auflösung, deren Auffindung und Beweis wir hier dem Leser selbst überlassen wollen, darauf an, durch das gegebene Parallelogramm EFGH (Fig. 157) eine beliebige gerade Linie AC, der HG parallel und doppelt so groß als dieselbe zu ziehen, u. s. w. — Ein besonderer Fall dieser Aufgabe ist der, wenn das umschriebene Viereck ABCD selbst wieder ein Parallelogramm werden soll.

Verhältniß des Flächeninhalts von Dreyecken und Parallelogrammen bey Einem gleichen Winkel. Art. 154 bis 156.

Art. 154. Lehrs. Wenn zwey Parallelogramme gleiche Winkel und gleichen Inhalt haben, so sind die Producte der die gleichen Winkel einschließenden Seiten einander gleich. Und, wenn die Producte der die gleichen Winkel zweyer Parallelogramme einschließenden Seiten einander gleich sind, so haben die beyden Parallelogramme gleichen Inhalt.

Bew. 1. Die beyden Parallelogramme AFBD und EBGC (Fig. 160) haben gleichen Inhalt und gleiche Winkel;

namentlich sey W. EBG = FBD. Man setze sie mit ihren gleichen Winkeln EBG und FBD so an einander, daß bey B Vertical-Winkel entstehen, d. h. daß FB mit BG, folglich auch, wegen der Gleichheit beyder Winkel, EB mit BD in gerade Linie kommt; und verlängere die beyden Seiten CE und AF, bis sie sich in H durchschneiden: so verhält sich, da AFBD = EBGC ist, (VI)

AFBD : FHEB = EBGC : FHEB.

Nun verhält sich auch

AFBD : FHEB = BD : BE (§. 66)

und

EBGC : FHEB = BG : BF

mithin auch (XIX)

BD : BE = BG : BF

also auch (I)

BD × BF = BE × BG.

2. In den beyden Parallelogrammen AFBD und EBGC sey BD × BF = BE × BG, oder (III) es verhalte sich

BD : BE = BG : BF

und der W. FBD sey = EBG. Man setze beyde Parallelogramme wie vorhin an einander; so verhält sich

BD : BE = AFBD : FHEB (§. 66)

und

BG : BF = EBGC : FHEB

also auch (XIX)

AFBD : FHEB = EBGC : FHEB.

Da nun FHEB = FHEB ist, so ist auch

AFBD = EBGC (V).

(Euklid VI. Satz 14).

Art. 155. Lehrs. Wenn zwey Dreyecke, welche einen gleichen Winkel haben, einander gleich sind; so sind die Producte der den gleichen Winkel einschließenden Seiten einander gleich. Und wenn die Producte der den gleichen Winkel einschließenden Seiten einander gleich sind, so haben beyde Dreyecke gleichen Inhalt.

Bew. In den beyden Dreyecken ABC und ADE (Fig. 161) sey der W. BAC = EAD. Man bringe AB und AE in eine gerade Linie, so daß bey A Verticalwinkel entstehen, so werden auch AC und AD in gerader Linie liegen. Dann ziehe man BD.

1) Wenn die beyden Dreyecke ABC und ADE einander gleich sind, so verhält sich

$$\triangle ABC : ABD = ADE : ABD \text{ (VI)}.$$

Nun verhält sich aber auch (§. 70)

$$\triangle ABC : ABD = AC : AD$$

und

$$\triangle ADE : ABD = AE : AD;$$

mithin verhält sich auch (XIX)

$$AC : AD = AE : AB$$

folglich ist auch (I)

$$AC \times AB = AD \times AE.$$

2) Wenn $AC \times AB = AD \times AE$ ist, oder wenn sich (III)

$$AC : AD = AE : AB$$

verhält; so folgt aus den beyden Proportionen (§. 70)

$$AC : AD = \triangle ABC : ABD$$

und

$$AE : AB = \triangle ADE : ABD$$

auch (XIX)

$$\triangle ABC : ABD = \triangle ADE : ABD.$$

Da nun $\triangle ABD = ABD$ ist, so ist folglich auch

$$\triangle ABC = ADE.$$

(Euklid VI. Satz 15).

Art. 156. Lehrs. Zwey Dreyecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Producte der diesem Winkel anliegenden Seiten.

Bew. (Fig. 162). In den beyden Dreyecken BAC und ADE sey der Winkel A gleich. Man setze sie mit diesem

gleichen Winkel zusammen, und ziehe DE. Betrachtet man AB und AD als die Grundlinien der beyden Dreyecke ABE und ADE, so haben dieselben, da sie ihre gemeinschaftliche Spitze in E haben, gleiche Höhen, verhalten sich also wie ihre Grundlinien (§. 70), oder es ist

$$\triangle ABE : \triangle ADE = AB : AD.$$

Betrachtet man eben so AC und AE als die Grundlinien der beyden Dreyecke ACB und AEB, so haben dieselben, da sie ihre gemeinschaftliche Spitze in B haben, gleiche Höhen. Also verhält sich auch

$$\triangle ACB : \triangle ABE = AC : AE.$$

Multiplicirt man beyde Proportionen mit einander (X), so erhält man

$$ABE \times ACB : ABE \times ADE = AB.\,AC : AD.\,AE.$$

oder

$$\triangle ACB : \triangle ADE = AB.\,AC : AD.\,AE.$$

(Legendre III. prop. XXIV).

Anm. Die beyden Dreyecke sind also einander gleich, wenn AB. AC = AD. AE ist, oder wenn sich AB : AE = AD : AC verhält.

Bomiscus. Art. 157.

Art. 157. Lehrs. Wenn man in einem Dreyeck eine Linie parallel mit der Grundlinie zieht, eine der beyden andern Seiten über die Spitze hinaus verlängert, auf der Verlängerung einen beliebigen Punkt annimmt, und diesen mit dem Endpunkt der Grundlinie durch eine gerade Linie verbindet; wenn man ferner mit dieser geraden Linie aus dem, jenem Endpunkt der Grundlinie gegen über liegenden, Endpunkt der parallelen Linie eine gerade Linie parallel zieht, bis sie die Verlängerung der dritten Seite des Dreyecks durchschneidet, und diesen Durchschnittspunkt mit dem andern Endpunkt der Grundlinie durch eine gerade Linie verbindet: so ist diese gerade Linie der geraden Linie parallel, welche den zuerst ge-

nannten Durchschnittspunkt mit dem andern Endpunkt der parallelen Linie verbindet. [oben S. 306].

Bew. (Fig. 163). In dem △ ABC sey DE der Grundlinie BC parallel gezogen; CA sey über des Dreyecks Spitze A hinaus verlängert, ein beliebiger Punkt auf dieser Verlängerung sey F, und es sey BF gezogen. Ferner sey EG ∥ BF; sie durchschneide die Verlängerung von BA in G. Zieht man nun GC und DF; so ist zu beweisen, daß DF ∥ GC ist.

Man ziehe BE, DC und FG.

Es ist nun (§. 69)

△ DBE = DCE

also

△ DBE + ADE = DCE + ADE

oder

△ ABE = ADC.

Ferner, weil EG ∥ BF ist, so ist (§. 69)

△ BFE = BFG

also auch

△ BFE — ABF = BFG — ABF

oder

△ ABE = △ AFG.

Daher ist

△ ADC = △ AFG

also

△ ADC + ACG = △ AFG + ACG

oder

△ DCG = △ FCG.

Da die beyden Dreyecke DCG und FCG einerley Grundlinie und einerley Inhalt haben, so haben sie auch gleiche Höhe; also ist (nach oben S. 306)

DF ∥ GC.

(Pappus lib. VII. prop. 134).

Anm. Klügel (s. v. Bomiscus) sagt, ein auf die angegebene Art beschriebenes Viereck sey in der Geometrie der Alten Bomiscus genannt worden. Aus Pappus l. c. scheint sich aber vielmehr zu ergeben, daß derselbe die ganze Figur

so nenne. Der Lehrsatz in der Uebersetzung des Commandinus fängt nämlich so an: „Sit bomiscos ABCDEFG, etc." Als Anmerkung fügt Commandinus hinzu: „hujusmodi figuram idcirco βωμισκον appellavit, quod parvi alteras [altaris] imaginem referat."

Gemeinschaftliche Spitze von gleich großen Dreyecken auf der Größe und Lage nach gegebenen Grundlinien, Art. 158 und 159.

Art. 158. Aufg. Zwey gegen einander geneigte gerade Linien seyen der Größe und Lage nach, und irgend eine dritte Linie der Lage nach gegeben: man soll auf dieser einen Punkt von der Beschaffenheit bestimmen, daß, wenn man aus demselben gerade Linien nach den Endpunkten der zwey gegebenen geraden Linien zieht, zwey Dreyecke entstehen, welche unter einander gleich groß sind.

Aufl. (Fig. 164). AB und CD seyen die zwey gegen einander geneigten, der Größe und Lage nach gegebenen geraden Linien; und die Linie MN sey der Lage nach gegeben: so ist auf derselben ein Punkt P von der Beschaffenheit zu bestimmen, daß, wenn man die geraden Linien PA, PB, PC und PD zieht, die beyden Dreyecke ABP und CDP einander gleich werden.

Die beyden geraden Linien AB und CD, oder die Verlängerungen derselben, durchschneiden sich in einem Punkte E. Man mache EF = AB, EG = CD und vollende das Parallelogramm FEGH. Hierauf ziehe man des Parallelogrammes Diagonale EH und verlängere dieselbe, bis sie die MN in einem Punkte P durchschneidet; so ist P der gesuchte Punkt, und ABP und CDP sind zwey Dreyecke, die unter einander gleich sind.

Bew. Da die Diagonale ein jedes Parallelogramm in zwey congruente Dreyecke theilt (§. 55), so ist $\triangle$ EHF = EHG.

Betrachtet man EH als die gemeinschaftliche Grundlinie der beyden Dreyecke EHF und EHG, so haben dieselben, da sie gleichen Inhalt haben, auch gleiche Höhen.

Betrachtet man ferner EP als die gemeinschaftliche Grundlinie der beyden Dreyecke EPF und EPG, so hat EPF mit dem △ EHF und EPG mit dem △ EHG einerley Höhe. Die beyden Dreyecke EPF und EPG haben also auch unter einander gleiche Grundlinie und gleiche Höhe; sind also (§. 69) einander gleich.

Nun ist △ ABP = EPF. Denn ihre Grundlinien AB und FE sind einander gleich; diese Grundlinien fallen ferner in die nämliche gerade Linie AE, und beyde Dreyecke haben ihre gemeinschaftliche Spitze in P, also auch gleiche Höhen.

Eben so ist △ CDP = EPG.

Folglich sind die beyden Dreyecke ABP und CDP auch unter einander gleich.

Anm. 1. Der Hypothesis des Lehrsatzes ist die Bedingung hinzugefügt worden, daß die beyden geraden Linien gegen einander geneigt seyen. Denn wenn AB und CD in derselben geraden Linie lägen, so wäre die Auflösung nur dann möglich, wenn sie zugleich von einerley Größe sind. Sind aber die beyden Linien AB und CD einander parallel, so finden wieder andere Betrachtungen Statt, welche anzustellen wir dem Leser überlassen wollen.

Anm. 2. Wäre die Bedingung nicht hinzugefügt worden, daß noch eine dritte gerade Linie der Lage nach gegeben sey; sondern würde überhaupt nur ein Punkt P gesucht, für welchen die beyden Dreyecke ABP und CDP einander gleich werden: so läßt die Aufgabe unzählig viele Auflösungen zu, oder es gibt unzählig viele Punkte P, die alle den Forderungen der Aufgabe Genüge thun. Es ergibt sich sogleich, daß dann jeder auf der Diagonale EH, oder auf deren über H oder E hinausgehenden Verlängerungen, gelegene Punkt die verlangte Beschaffenheit hat.

Man nennt hier die gerade Linie IK, in der jeder Punkt die verlangte Beschaffenheit hat, den geometrischen Ort für den gesuchten Punkt.

Andere Beyspiele von geometrischen Oertern sind folgende: „Der geometrische Ort für die Spitze eines Dreyecks von gegebener Grundlinie und von gegebenem Winkel an der Spitze ist die Peripherie eines über der Grundlinie beschriebenen Kreisabschnittes, welcher den gegebenen Winkel faßt." — „Der geometrische Ort für die Spitze eines Dreyecks von gegebener Grundlinie und von gegebenem Inhalt (also auch von gegebener Höhe) ist die gerade Linie, welche mit der Grundlinie in einem, der Höhe des Dreyecks gleichen, Abstande parallel geht."

Von den geometrischen Oertern läßt sich eine sehr vortheilhafte Anwendung zur Auflösung solcher Aufgaben machen, die nur eine einzige Auflösung zulassen. Es sey z. B. ein Dreyeck zu construiren, dessen Grundlinie, Höhe und Winkel an der Spitze gegeben sind. Wenn man von dem gesuchten Dreyeck die Grundlinie hinzeichnet, so ist die Aufgabe gelöst, sobald man den Punkt gefunden hat, wo seine Spitze liegen muß. Der geometrische Ort für diesen Punkt ist aber 1) die Peripherie eines über der Grundlinie beschriebenen Kreisabschnittes, welcher den gegebenen Winkel an der Spitze faßt (denn Peripheriewinkel, die auf denselben Bogen stehen, sind (nach §. 112) einander gleich); und 2) die gerade Linie, welche mit der Grundlinie in einem, der Höhe des Dreyecks gleichen, Abstande parallel geht. Da nun die Spitze des Dreyecks in beyden geometrischen Oertern zugleich liegen muß, so kann sie nur in solchen Punkten liegen, welche beyde geometrischen Oerter mit einander gemein haben, d. h. in dem oder in den Durchschnittspunkten. Sind nun noch die Auflösungen der beyden Aufgaben gelehrt worden: „über einer gegebenen geraden Linie einen Kreisabschnitt zu construiren, der einen gegebenen Winkel faßt (s. Band II. nach §. 114)," und „in gegebenem Abstande mit einer gegebenen geraden Linie eine andere parallel zu ziehen (s. oben S. 246); so ist nunmehr die Construction des Dreyecks, dessen Grundlinie, Höhe und Winkel an der Spitze gegeben sind, ohne weitere Schwierigkeiten zu verrichten.

Aus dem eben gegebenen Beyspiele fällt schon in die Augen, wie die Anwendung der geometrischen Oerter, zur Auflösung von Aufgaben, mit der Analysis der Alten (vgl. oben S. 117 in der Note) zusammen hänge. Sie geben gleichsam die Hülfsmittel und die Vorkenntnisse zu den analytischen Auflösungen ab. Daher haben sich die Alten auch viel mit den geometrischen Oertern beschäftigt. Besonders berühmt waren die ebenen Oerter des Apollonius. Unter ebenen geometrischen Oertern verstanden nämlich die Alten die Fälle, wo der geometrische Ort eines gesuchten Punktes eine gerade Linie oder eine Kreislinie war, als welche Untersuchungen bloß zur Planimetrie gehörten. Im Gegensatze verstanden sie unter körperlichen Oertern die Fälle, wo der geometrische Ort eines gesuchten Punktes einer der Kegelschnitte (die, wenn man sie wirklich als Schnitte am Kegel betrachtet, die Lehren der Stereometrie voraussetzen), und unter linearischen Oertern die Fälle, wo derselbe irgend eine andere krumme Linie war. Noch andere Eintheilungen der geometrischen Oerter kann man in der oben S. 118 angeführten Schrift von Camerer, daselbst S. 19, nachlesen.

Anm. 3. Um die unbestimmte Aufgabe (wenn wir so nach der Analogie der Algebra eine geometrische Aufgabe nennen dürfen, welche unzählig viele Auflösungen zuläßt) in eine bestimmte zu verwandeln, bin ich dem Verfahren des Th. Simpson gefolgt, welcher in der „Construction einer großen Mannigfaltigkeit von geometrischen Aufgaben," a. a. O. S. 210—254, immer noch eine Linie irgend einer Art hinzubedingt, auf welcher der gesuchte Punkt liegen muß. MN braucht nämlich keineswegs eine gerade Linie zu seyn.

Anm. 4. Eine Anwendung von unserem Satze, als geometrischem Orte, könnte, nach der Analysis der Alten sogleich bey der Auflösung der nachfolgenden Aufgabe gemacht werden; bey welcher ich übrigens, der Kürze wegen, nur eine von den verschiedenen Lagen der drey gegebenen Linien betrachten,

und die Betrachtung der übrigen möglichen Fälle dem Leser überlassen will.

Art. 159. Aufg. Drey gegen einander geneigte gerade Linien seyen der Größe und Lage nach gegeben: man soll denjenigen Punkt finden, von welchem aus gerade Linien nach den Endpunkten der drey gegebenen geraden Linien gezogen mit diesen drey Dreyecke bilden, die unter einander gleich sind.

Aufl. (Fig. 165). AB, CD und EF seyen die drey der Größe und Lage nach gegebenen geraden Linien. Man verlängere dieselben, bis sie sich in den Punkten G und H durchschneiden, mache GK = AB, GI und HL = CD und HM = EF, und vollende die Parallelogramme KGIN und MHLO. In diesen Parallelogrammen ziehe man die Diagonalen GN und HO, und verlängere dieselben, bis sie sich in P durchschneiden: so ist P der gesuchte Punkt; und, wenn man die geraden Linien PA, PB, PC, PD, PE, PF zieht, so sind die drey Dreyecke ABP, CDP und EFP unter einander gleich.

Bew. Man fälle aus K und I die Perpendikel Kq und Ir auf GN, und ziehe die geraden Linien PK und PI.

Nun ist △ GNK = GNI (§. 55). Betrachtet man GN als die gemeinschaftliche Grundlinie derselben, so haben sie, da sie gleichen Inhalt haben, auch gleiche Höhen. Also sind die Perpendikel Kq und Ir einander gleich.

Betrachtet man ferner in den beyden Dreyecken GPK und GPI die GP als die gemeinschaftliche Grundlinie, so sind Kq und Ir ihre Höhen. Diese Höhen sind aber einander gleich. Folglich sind auch die beyden Dreyecke GPK und GPI einander gleich (§. 69).

Betrachtet man AB und KG als die Grundlinien der beyden Dreyecke ABP und GPK, so liegen dieselben in der nämlichen geraden Linie AG. Nun haben beyde Dreyecke ihre gemeinschaftliche Spitze in P. Ihre Höhe ist also das Perpendikel aus P auf die gerade Linie AG. Beyde Dreyecke haben demnach auch gleiche Höhe. Die beyden Dreyecke ABP und GPK sind also einander gleich.

Eben so sind die beyden Dreyecke CDP und GPI einander gleich.

Da nun GPK und GPI unter einander gleich waren, so sind auch ABP und CDP einander gleich.

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß die Dreyecke EFP und CDP einander gleich sind.

Folglich sind die drey Dreyecke ABP, CDP und EFP unter einander gleich.

(Th. Simpson p. 218).

Verwandlung der Figuren. Art. 160 bis 169.

Art. 160. Aufg. Eine gegebene geradlinige Figur in eine gleich große geradlinige Figur zu verwandeln, welche eine Seite weniger als die gegebene hat.

Erster Fall. Wenn durch die Verwandlung ein ausgehender Winkel des Vielecks wegfällt.

Aufl. (Fig. 166). ABCDEF sey ein Sechseck, das in ein gleich großes Fünfeck verwandelt werden soll. Durch die Verwandlung soll die Ecke E, oder der ausgehende Winkel FED wegfallen.

Man ziehe die Diagonale FD, ziehe durch E, der FD parallel, eine Linie EH bis sie die Verlängerung von AF in H trifft, und ziehe DH; so ist ABCDH das verlangte Fünfeck, das dem Sechseck ABCDEF gleich ist.

Bew. Die beyden Dreyecke FDH und FDE stehen auf der gemeinschaftlichen Grundlinie FD und zwischen denselben Parallellinien FD und HE, haben also auch gleiche Höhen; sind daher einander gleich (§. 69); oder es ist

$$\triangle\ FDH = FDE.$$

Folglich ist auch

$$ABCDF + FDH = ABCDF + FDE$$

oder

$$ABCDH = ABCDEF.$$

Zweyter Fall. Wenn durch die Verwandlung ein eingehender Winkel des Vielecks wegfällt.

Aufl. (Fig. 167). ABCDEF sey ein Sechseck, das in ein gleich großes Fünfeck verwandelt werden soll. Durch die Verwandlung soll die Ecke E oder der eingehende Winkel FED wegfallen.

Man ziehe die Diagonale FD, ziehe durch E, der FD parallel, eine Linie EH bis sie die AF in H trifft, und ziehe DH; so ist ABCDH das verlangte Fünfeck, das dem Sechseck ABCDEF gleich ist.

Bew. Die beyden Dreyecke FDH und FDE stehen auf der gemeinschaftlichen Grundlinie FD und zwischen denselben Parallellinien FD und EH, haben also auch gleiche Höhen; mithin ist (§. 69)

$$\triangle \text{FDH} = \text{FDE}.$$

Folglich ist auch

$$\text{ABCDF} - \text{FDH} = \text{ABCDF} - \text{FDE}$$

oder

$$\text{ABCDH} = \text{ABCDEF}.$$

Zus. Auf dieselbe Weise läßt sich das Fünfeck ABCDH wieder in ein gleich großes Viereck, und das Viereck in ein gleich großes Dreyeck verwandeln. Es läßt sich also, mittelst obiger Aufgabe, eine jede geradlinige Figur, sie mag so viele Seiten haben, als sie will, und die Winkel mögen ausgehende oder eingehende seyn, in ein gleich großes Dreyeck verwandeln. (Meyer Hirsch I. S. 1—7).

Anm. Die Verwandlung geradliniger Figuren in Dreyecke gibt vielen und leichten Stoff zu Uebungen für die Schüler, indem man die verschiedenen Fälle vereinzelt, und von den leichteren zu den schwereren übergeht. Ich setze einige solche Fälle hierher. Die Figuren kann sich der Leser leicht selbst hinzuzeichnen.

a) Ein Viereck ABCD mit lauter ausgehenden Winkeln in ein Dreyeck zu verwandeln, dessen Grundlinie längs AB, und dessen Spitze in C falle.

b) Ein solches, das bey D einen eingehenden Winkel hat,

in ein Dreyeck zu verwandeln, dessen Grundlinie längs AB, und dessen Spitze in C falle.

c) Ein Fünfeck ABCDE mit lauter ausgehenden Winkeln in ein Dreyeck zu verwandeln, dessen Grundlinie längs AB, und dessen Spitze in D falle.

d) Ein eben solches in ein Dreyeck, dessen Grundlinie längs AB, und dessen Spitze in C falle.

e) Ein Viereck ABCD mit lauter ausgehenden Winkeln in ein Dreyeck, dessen Grundlinie längs AB, und dessen Spitze in einen gegebenen Punkt E auf der Seite DC falle. — (Wenn man die Linien EA und EB zieht, so ist die Auflösung wie bey der Verwandlung des Fünfecks in c).

f) Ein Viereck ABCD mit lauter ausgehenden Winkeln, in ein Dreyeck, dessen Grundlinie längs AB, und dessen Spitze in irgend einen gegebenen Punkt E innerhalb des Vierecks falle. — (Man ziehe die Linien EA, EB, EC, ED, verwandle das Viereck AECD in ein Dreyeck AEF, dessen Grundlinie AF längs AD, und dessen Spitze in E fällt; hierauf verwandle man das Viereck ABEF in ein Dreyeck BEG, dessen Grundlinie BG längs AB, und dessen Spitze in E fällt; endlich verwandle man das Viereck GBCE in ein Dreyeck GHE, dessen Grundlinie GH längs AB, und dessen Spitze in E fällt: so ist GHE das verlangte Dreyeck.

Art. 161. Aufg. Ein gegebenes Dreyeck in ein gleich großes Rechteck zu verwandeln.

Aufl. (Fig. 168). ABC sey das gegebene Dreyeck. Man nehme beliebig eine Seite AB desselben als Grundlinie an und halbire dieselbe in D. Durch die Spitze C ziehe man eine Linie EF ll AB, und errichte auf AB in A und D die Perpendikel AG und DH, welche die EF in G und H treffen: so ist ADHG das verlangte Rechteck.

Bew. Da bey A und D rechte Winkel sind, so ist AG ll DH; da überdem GH ll AD ist, so ist ADHG ein Parallelogramm; und da dieses Parallelogramm lauter rechte Winkel hat, ein Rechteck.

Man ziehe BI ∥ DH, so ist ABIG ebenfalls ein Rechteck.

Nun ist ABIG = 2. ABC

und

$$ABIG = 2. ADHG$$

also ist

$$2. ABC = 2. ADHG$$

folglich

$$ABC = ADHG.$$

Art. 162. Aufg. Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. (Fig. 169). ABCD sey das gegebene Rechteck, AB die kleinere Seite desselben. Man verlängere diese, und mache AE = des Rechtecks größerer Seite AD, halbire AE in G, verlängere CB und nehme darauf von G aus GH = GE. Endlich ziehe man AH und beschreibe darauf das Quadrat AHIK, so ist dieses dem Rechteck ABCD gleich.

Bew. Man ziehe KE und DH, so ist W. HAE + KAH = HAE + EAD oder KAE = HAD; ferner ist KA = AH und AE = AD, also △ KAE ≌ HAD (§. 39).

Die beyden Dreyecke AGH und HGE sind gleichschenklig, also ist

$$W.\ GAH = AHG$$

und

$$W.\ GEH = GHE$$

also

$$W.\ GAH + GEH = AHG + GHE$$

oder

$$W.\ GAH + GEH = AHE.$$

Es ist also, da die drey Winkel eines jeden Dreyecks 2 R. betragen, der Winkel AHE die Hälfte von 2 R., also ein rechter Winkel.

Mithin ist IHE eine gerade Linie.

Das △ AKE hat nun mit dem Quadrat AKIH die Grundlinie AK gemein, und liegt mit ihm zwischen denselben

Parallellinien AK und IE, hat also auch mit demselben gleiche Höhe.

Das Quadrat AKIH ist also = 2. △ AKE.

Eben so ist das Rechteck ABCD = 2. △ HAD.

Folglich ist das Quadrat AKIH = dem Rechteck ABCD.

Anm. 1. Diese Auflösung der Aufgabe, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, hat das Empfehlende, daß sie sich unmittelbar an die Aufgaben, eine jede geradlinige Figur in ein Dreyeck und jedes Dreyeck in ein Rechteck zu verwandeln, anschließt.

Alle diese Aufgaben reihen sich unmittelbar an den Lehrsatz, daß Dreyecke von gleicher Höhe und Grundlinie gleich groß sind, auf welchem Lehrsatz die Ausmessung der Figuren beruht.

Die Lehre von Ausmessung der Figuren setzt Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie voraus. Ohne diese Anwendung müßten wir uns damit begnügen, daß wir die in Hinsicht auf ihre Größe zu vergleichenden Figuren in gleich große Quadrate verwandelten. Wir könnten dieses Verfahren die Ausmessung der Figuren auf rein geometrischem Wege nennen. So läßt sich also, mit Hülfe dieser Aufgabe, die ganze Lehre von Ausmessung der Figuren im ununterbrochenen Zusammenhang vortragen.

Anm. 2. In der Auflösung obiger Aufgabe ist zugleich die Auflösung der Aufgabe enthalten, ein Quadrat zu verfertigen, das einem aliquoten Theil eines gegebenen Quadrates gleich sey. Es sey z. B. ein Quadrat zu machen, das dem dritten Theil des Quadrats AEFD (Fig. 169) gleich ist. Man theile AE in drey gleiche Theile (Art. 142) oder nehme AB dem dritten Theile der Seite AE gleich, ziehe BC ll AD, so ist das Rechteck ABCD der dritte Theil des gegebenen Quadrats. Nun verwandle man das Rechteck ABCD in das Quadrat AHIK, so ist dieses das gesuchte Quadrat.

Art. 163. Aufg. Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, dessen größere Seite gegeben ist. (Ob des ge-

suchten Rechtecks größere oder kleinere Seite gegeben ist, erkennt man sogleich daran, ob diese Seite größer oder kleiner als die Seite des gegebenen Quadrats ist).

Aufl. (Fig. 169). AKIH sey das gegebene Quadrat, AE des gesuchten Rechtecks größere Seite. Man verlängere IH nach E, und nehme, von A aus, AE = der gegebenen Seite des Rechtecks, so daß der Endpunkt E auf HE trifft. Auf AE beschreibe man das Quadrat AEFD, ziehe durch H die HC ∥ AD, welche die AE in B, und die DF in C trifft: so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Bew. Daß ABCD ein Rechteck ist, ergibt sich aus der Construction.

Man ziehe KE und DH, so ist

W. KAH = EAD

und

W. HAE = HAE

also

W. KAH + HAE = EAD + HAE

oder

W. KAE = HAD.

Ferner ist KA = AH und AE = AD, als Seiten derselben Quadrate; also ist

△ KAE ≅ HAD.

Nun hat das △ HAD mit dem Rechteck ABCD die Grundlinie AD gemein, und hat auch, da es mit demselben zwischen den gleichen Parallellinien AD und HC liegt, einerley Höhe mit ihm. Mithin ist

Rechteck ABCD = 2. HAD.

Eben so läßt sich beweisen, daß

Quadrat AHIK = 2. KAE

ist. Da nun △ HAD = KAE, also 2. HAD = 2. KAE ist, so ist folglich

Rechteck ABCD = Quadrat AHIK.

Art. 164. Aufg. Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, dessen kleinere Seite gegeben ist (vgl. Art. 163).

Aufl. (Fig. 169). AHIK sey das gegebene Quadrat, AB des gesuchten Rechtecks kleinere Seite.

Man errichte auf AB in B das Perpendikel BH, und nehme, von A aus, AH = der Seite des gegebenen Quadrats, so daß der Endpunkt H auf BH liegt. Dann beschreibe man auf AH das gegebene Quadrat AHIK, und verlängere IH und AB bis sie sich in E durchschneiden. Auf AE beschreibe man das Quadrat AEFD, und verlängere HB, bis sie die DF in C trifft: so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Bew. Wie in Art. 163. Da W. HBA = BAD ist; so ist HC ‖ AD.

Anm. 1. Zur Auflösung obiger Aufgabe kann man sich auch des Verfahrens Art. 165 bedienen, nach welchem dort das Parallelogramm AHEF (Fig. 170) in das Parallelogramm EGCI verwandelt wird, das die gegebene Seite EI hat. Man darf nur, Statt des Parallelogramms AHEF, das gegebene Quadrat setzen.

Anm. 2. So wie wir die Verwandlung einer jeden geradlinigen Figur in ein Quadrat als eine Ausmessung der Figuren auf rein geometrischem Wege betrachten können (vgl. oben Anm. zu Art. 162); so bedürfen wir, wenn wir verschiedene umgekehrte Aufgaben, da von einer Figur die Größe gegeben ist, ohne Beyhülfe der Arithmetik (der Divisions-Exempel) auflösen wollen, der Verwandlung von Quadraten in Rechtecke u. s. w. Wenn es nämlich heißt, von einer Figur, deren Gestalt noch unbestimmt ist, sey der Inhalt gegeben, so müssen (oder können) wir uns denken, es sey ein Quadrat von dem gegebenen Inhalte gegeben.

Es werde z. B. verlangt: aus der gegebenen Grundlinie und dem Inhalte eines Dreyecks seine Höhe zu finden. Da wir wissen, daß wir, wenn uns für Grundlinie und Höhe des Dreyecks Zahlen gegeben sind, die Grundlinie mit der Höhe multipliciren und durch 2 dividiren müssen (§. 77), oder daß, wenn wir die Zahl für die Grundlinie mit g, die Zahl für die Höhe mit h, und die Zahl für den Inhalt mit a bezeichnen,

$$a = \frac{1}{2} gh$$

ist: so leiten wir daraus

$$h = \frac{2a}{g}$$

ab; d. h. man findet eine Zahl für die Höhe, wenn man die Zahl für den Inhalt mit 2 multiplicirt und durch die Zahl für die Grundlinie dividirt. Diese Aufgabe ohne Beyhülfe der Arithmetik, oder auf rein geometrischem Wege aufzulösen, verwandeln wir das Quadrat, das für den Inhalt des Dreyecks gegeben ist, in ein Rechteck, dessen eine Seite der gegebenen Grundlinie des Dreyecks gleich ist; so ist die doppelte andere Seite dieses Rechtecks die gesuchte Höhe des Dreyecks.

Ohne Beyhülfe der Arithmetik aus dem gegebenen Inhalte eines Dreyecks, und seiner gegebenen Höhe die Grundlinie zu finden, müßte man eben so das Quadrat, das dem gegebenen Inhalte gleich ist, in ein Rechteck verwandeln, dessen eine Seite der gegebenen Höhe gleich ist. Die doppelte andere Seite wäre des Dreyecks gesuchte Grundlinie.

Hierher gehören noch die Aufgaben, die nach §. 78 eingeschaltet sind.

Art. 165. Aufg. Ein Parallelogramm in ein anderes von gegebener einen Seite zu verwandeln.

Aufl. (Fig. 170). AFEH sey ein gegebenes Parallelogramm, welches in ein gleich großes Parallelogramm verwandelt werden soll, dessen eine Seite = LK sey.

Man verlängere eine Seite HE des gegebenen Parallelogramms, und mache die Verlängerung EI = LK, ziehe FI, und mit derselben parallel die HG bis sie die Verlängerung von FE in G durchschneidet. Hierauf vollende man das Parallelogramm IEGC; so ist dieses das verlangte.

Bew. Man ziehe die Diagonalen IG und FH; so ist (§. 69)

$$\triangle FIH = FIG$$

also

$$\triangle FIH - FIE = FIG - FIE$$

oder

$$\triangle\ FEH = \triangle\ IEG$$

folglich

$$2.\ \triangle\ FEH = 2.\ \triangle\ IEG$$

oder (§. 55)

Parallelogr. AFEH = Parallelogr. IEGC.

(Klügel II. p. 216).

Anm. Auf dieselbe Weise wird die Aufgabe aufgelöst, ein gegebenes Dreyeck, wie FEH, in ein gleich großes Dreyeck IEG von gegebener Seite EI zu verwandeln, und das zugleich den W. IEG = FEH hat.

Art. 166. Aufg. Ein gegebenes Dreyeck in ein gleich großes Parallelogramm von gegebenem Winkel zu verwandeln.

Aufl. (Fig. 171). ABC sey das gegebene Dreyeck, m der gegebene Winkel. Man halbire die Grundlinie AB in D, mache den Winkel EDB = m, ziehe durch C die CF ll AB, und durch B die BF ll DE, so ist DBFE das gesuchte Parallelogramm.

Bew. Es ist

DBFE = 2. DBE (§. 55)

und

ABC = 2. DBC (§. 70).

Nun ist DBE = DBC (§. 69), also auch 2. DBE = 2. DBC; folglich auch

DBFE = ABC.

(Euklid I. Satz 42).

Art. 167. Lehrs. Wenn man durch einen beliebigen Punkt in der Diagonale eines Parallelogramms zwey Linien mit den Seiten des Parallelogramms parallel zieht, so wird dadurch das Parallelogramm in vier Parallelogramme zerlegt. Unter diesen sind die zwey, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich.

Bew. Es sey E (Fig. 170) ein beliebiger Punkt auf der Diagonale BD des Parallelogramms ABCD; durch E seyen die Linien FG und HI mit den Seiten des Parallelogramms

parallel gezogen, so sind FDIE, IEGC, FEHA und EGBH Parallelogramme (§. 25).

Das Parallelogramm ABCD wird durch die Diagonale BD in die beyden congruenten Dreyecke BDA und BDC, das Parallelogramm FDIE durch die Diagonale DE in die beyden congruenten Dreyecke EDF und EDI, und das Parallelogramm EGBH durch die Diagonale EB in die beyden congruenten Dreyecke BEH und BEG getheilt (§. 55). Es ist also

BDA — EDF — BEH = BDC — EDI — BEG

oder

Parallelogr. FEHA = Parallelogr. IEGC.

(Euklid I. Satz 43; Kries S. 370).

Art. 168. Aufg. Ein gegebenes Dreyeck in ein gleich großes Parallelogramm von gegebenem Winkel und gegebener Seite zu verwandeln. [Art. 166 und 167].

Aufl. (Fig. 170). PQR sey das gegebene Dreyeck, das in ein gleich großes Parallelogramm verwandelt werden soll, das die gegebene Seite LK und den gegebenen Winkel M habe.

Man verwandle, nach Art. 166, das △ PQR in ein gleich großes Parallelogramm AHEF, dessen Winkel A dem gegebenen Winkel M gleich sey; verlängere eine Seite HE desselben, und nehme darauf EI = der gegebenen Linie LK; ergänze das Parallelogramm FEID, ziehe darin die Diagonale DE und verlängere dieselbe, bis sie die Verlängerung von AH in B trifft; hierauf ergänze man das Parallelogramm DABC und verlängere die FE bis sie die Seite BC in G trifft: so ist EGCI das verlangte Parallelogramm.

Bew. Es ist seine Seite EI = der gegebenen Linie LK, sein Winkel IEG = FEH = A = dem gegebenen Winkel M, und es selbst ist (Art. 167) dem Parallelogramm AHEF, also auch dem gegebenen △ PQR gleich (Euklid I. Satz 44).

Anm. 1. In der Auflösung dieser Aufgabe ist zugleich die Auflösung der Aufgabe enthalten, ein gegebenes Paral-

lelogramm in ein gleich großes Parallelogramm von gegebener Seite und gegebenem Winkel zu verwandeln.

Anm. 2. Eine jede gegebene geradlinige Figur in ein gleich großes Parallelogramm von gegebener Seite nnd gegebenem Winkel zu verwandeln, zerlege man die Figur durch Diagonalen in Dreyecke, verwandle ein jedes Dreyeck in sein gleich großes Parallelogramm, das die gegebene Seite und den gegebenen Winkel hat, und setze dann die gefundenen Parallelogramme mit ihren gleichen Seiten so an einander, daß die andern einander gegen über liegenden Seiten in zwey einander parallele gerade Linien kommen. (Euklid I. 45).

Art. 169. Aufg. Ein jedes beliebige Dreyeck in ein gleichseitiges zu verwandeln. [Art. 162 und 156].

Aufl. ABC (Fig. 172) sey das gegebene Dreyeck. Man zeichne an die eine Seite AB in A einen W. BAD $= \frac{2}{3}$ R. (welches dadurch geschehen kann, daß man über AB ein gleichseitiges △ ABm beschreibt); ziehe durch C eine Linie CD ∥ AB, welche die AD in D trifft, und ziehe DB. Hierauf beschreibe man ein Rechteck, das die beyden Seiten AB und AD hat. Dieses Rechteck verwandle man, nach Art. 162, in ein Quadrat. pq sey die Seite dieses Quadrats. Man mache hierauf auf AB und AD, deren eine man verlängern muß, AF $=$ AE $=$ pq, und ziehe FE, so ist AFE das verlangte gleichseitige Dreyeck.

Bew. 1. Da AF $=$ AE ist, so ist auch (§. 43) W. AFE $=$ AEF. Nun ist aber W. FAE $= \frac{2}{3}$ R.; also ist AFE $+$ AEF $= \frac{4}{3}$ R.; folglich AFE $=$ AEF $= \frac{2}{3}$ R. Das △ AFE ist also gleichseitig (§. 50).

2. Da die beyden Dreyecke AFE und ABE einen gleichen Winkel bey A haben, so verhalten sie sich wie die Producte der diesen Winkel einschließenden Seiten (Art. 156), oder es ist

$$\triangle\ AFE : \triangle\ ABD = AB \times AD : AE \times AF.$$

Nun ist, nach der Construction, AE $\times$ AF $=$ pq $\times$ pq $=$ AB $\times$ AD. Also ist auch △ AFE $=$ △ ABD. Es

ist aber △ ABD = △ ABC (§. 69). Folglich ist auch △ AFE = △ ABC.

Zus. Da sich jede geradlinige Figur in ein Dreyeck verwandeln läßt (Art. 160 Zus.), so läßt sich mithin auch jede geradlinige Figur insbesondere in ein gleichseitiges Dreyeck verwandeln.

Anm. Bekanntlich wird AE dadurch gefunden, daß man die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen AB und AD sucht (§. 137. b.). Wir bedienen uns dazu hier des Art. 162, um unsere Aufgabe dem Abschnitte von der Verwandlung der Figuren anreihen zu können.

Lehrsätze aus der Lehre vom Maximum und Minimum. Art. 170 bis 179.

Art. 170. Hülfss. Wenn von einem Punkte außerhalb einer gegebenen geraden Linie zwey gerade Linien von ungleicher Größe gezogen werden; so weicht die kleinere derselben weniger als die größere von dem Perpendikel ab, das von dem Punkte auf jene gegebene gerade Linie gefällt werden kann.

Bew. (Fig. 34).

Erster Fall. Wenn beyde gerade Linien auf derselben Seite des Perpendikels liegen.

Aus dem Punkt A seyen die beyden geraden Linien AC und AD nach der gegebenen geraden Linie MN gezogen, AD sey > AC, und AB sey senkrecht auf MN; so ist zu beweisen, daß AC weniger von AB abweicht, als AD.

AD und AC machen mit DC ein Dreyeck ADC. Da AD > AC ist, so ist auch W. DCA > ADC (§. 51). W. ADC ist also ein spitzer Winkel.

AD macht auch mit AB und BD ein △ ABD. Darin ist ABD ein rechter Winkel. Daher ist ADB ein spitzer Winkel.

Läge nun C nicht zwischen D und B, so wären ADC und ADB Nebenwinkel von einander. Da es nun aber keine zwey

Nebenwinkel geben kann, die beyde zugleich spitz sind, so kann C nicht auf der über D hinaus gehenden Verlängerung von BD liegen, sondern muß zwischen D und B fallen. Daher fällt auch AC zwischen AB und AD; oder AC weicht weniger als AD von AB ab.

Zweyter Fall. Wenn beyde gerade Linien auf verschiedenen Seiten des Perpendikels liegen.

AD und AE seyen die beyden geraden Linien, und es sey AE $<$ AD. Man schneide auf der andern Seite des Perpendikels AB die BC $=$ BE ab, und ziehe AC; so ist $\triangle$ ABC $\cong$ ABE (§. 39), also AC $=$ AE, und W. CAB $=$ EAB.

Da nun AC $=$ AE, mithin $<$ AD ist, so weicht, nach dem ersten Fall, AC weniger von dem Perpendikel AB ab, als AD; oder es ist W. CAB $<$ DAB. Also ist auch W. EAB $<$ DAB; oder AE weicht weniger von dem Perpendikel AB ab, als AD.

Anm. Obiger Lehrsatz ist die Umkehrung des Lehrsatzes Art. 33. Sein Beweis kann auch sehr leicht auf diesen zurück geführt werden.

Art. 171. Lehrs. Unter allen Dreyecken auf derselben Grundlinie und von gleichem Umfange hat das gleichschenklige den größten Inhalt. [Art. 43 und 170].

Bew. (Fig. 173). Es seyen ABC und ABD zwey Dreyecke von gleichem Umfange, welche auf derselben Grundlinie AB stehen. Im $\triangle$ ABC seyen die beyden Seiten AC und BC einander gleich, im $\triangle$ ADB seyen die Seiten AD und BD ungleich. Da beyde Dreyecke gleichen Umfang, und die eine Seite AB gleich haben, so ist die Summe der beyden andern Seiten in beyden Dreyecken ebenfalls gleich; oder es ist

$$AC + BC = AD + BD.$$

Man fälle aus C das Perpendikel CG auf AB, und ziehe durch D die DF $\parallel$ BA, welche das Perpendikel GC oder dessen Verlängerung im Punkt E durchschneide, und ziehe AE und BE, so ist (§. 69)

$\triangle$ ABE = ABD.

Da EG senkrecht auf FD steht, also W. GEF = GED, und da W. GEA = GEB (§. 45) ist; so ist auch

W. GEF — GEA = GED — GEB

oder

W. AEF = BED

also (Art. 43)

AE + EB < AD + DB.

Es ist also auch

AE + EB < AC + BC

also auch, da AE = EB und AC = BC ist,

AE < AC.

Es weicht mithin AE von dem Perpendikel AG weniger ab, als AC (Art. 170); oder es ist

EG < CG

also, da die beyden Dreyecke ABE und ABC dieselbe Grundlinie AB, aber verschiedene Höhen GE und GC haben,

$\triangle$ ABE < $\triangle$ ABC.

Folglich ist auch

$\triangle$ ABD < $\triangle$ ABC.

(Th. Simpson p. 198).

Anm. Unter allen Dreyecken von gleichem Umfange hat also das gleichseitige den größten Inhalt. Denn wäre ABC kein gleichseitiges Dreyeck, und wäre z. B. BC nicht = AB; so ließe sich auf der Grundlinie AC ein gleichschenkliges Dreyeck von demselben Umfange wie das $\triangle$ ACB beschreiben, das aber einen größeren Inhalt als das $\triangle$ ACB hat, dessen Seiten CB und BA ungleich sind. Nur wenn das $\triangle$ ACB gleichseitig ist, läßt sich kein Dreyeck von gleichem Umfange mehr beschreiben, das einen größeren Inhalt hätte.

Art. 172. Lehrs. Unter allen Dreyecken auf derselben Grundlinie und von gleichem Inhalt hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang. [Art. 43].

Bew. (Fig. 173). Es seyen ABE und ABD zwey Dreyecke von gleichem Inhalt, die auf derselben Grundlinie AB stehen. Im

△ ABE seyen die beyden Seiten AE und BE einander gleich; im △ ABD seyen die Seiten AD und BD ungleich. Man fälle aus E das Perpendikel EG auf AB, ziehe die gerade Linie DE, und verlängere dieselbe über E hinaus nach F.

Da die beyden Dreyecke ABE und ABD gleiche Grundlinien und gleichen Inhalt haben, so haben sie auch gleiche Höhen. Die gerade Linie ED, in welcher ihre Spitzen E und D liegen, ist also mit AB parallel.

Da W. GEF = GED = 1 R. und (nach §. 45) W. AEG = BEG; so ist auch

W. GEF — AEG = GED — BEG

oder

W. AEF = BED.

Es ist also (Art. 43)

$$AE + EB < AD + DB$$

folglich auch

$$AB + AE + EB < AB + AD + DB$$

oder der Umfang des gleichschenkligen Dreyecks kleiner als der Umfang des ungleichseitigen Dreyecks, das mit ihm auf derselben Grundlinie AB steht, und gleichen Inhalt hat.

Anm. Unter allen Dreyecken von gleichem Inhalte hat also das gleichseitige den kleinsten Umfang. Denn wäre das △ ABE nicht gleichseitig, wäre z. B. EB nicht = AB, so ließe sich auf der Seite AE als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreyeck beschreiben, das denselben Inhalt wie ABE, aber einen kleineren Umfang hätte. Nur, wenn das △ AEB gleichseitig ist, läßt sich kein Dreyeck von gleichem Inhalt mehr beschreiben, das einen kleineren Umfang hätte.

Art. 173. Lehrs. Wie Art. 171. [Art. 170].

Bew. (Fig. 174). AB sey die gemeinschaftliche Grundlinie der beyden Dreyecke ABC und ABD. Im △ ABC seyen die beyden Seiten AC und BC einander gleich, im △ ABD seyen AD und BD ungleich, und zwar AD > BD. Man ziehe durch B die BE senkrecht auf AB, schneide darauf

von C aus die CH = CB, und von D aus die DE = DB ab.

Da die beyden Dreyecke ABC und BHC gleichschenklig sind, so ist

$$W.\ CAB = CBA$$

und

$$W.\ CHB = CBH$$

also

$$W.\ CAB + CHB = CBA + CBH = 1\ R.$$

folglich

$$W.\ CAB + CHB + CBA + CBH = 2\ R.$$

Da nun die sechs Winkel der beyden Dreyecke ABC und BHC zusammen 4 R. betragen, so betragen die zwey Winkel ACB und HCB zusammen 2 R.; folglich ist ACH eine gerade Linie.

Da ferner AD > DB ist, so ist

$$W.\ BAD < ABD$$

da aber das △ EBD gleichschenklig ist, so ist

$$W.\ BED = EBD$$

also

$$W.\ BAD + BED < ABD + EBD$$

oder

$$W.\ BAD + BED < 1\ R.$$

folglich

$$W.\ BAD + BED + ABD + EBD < 2\ R.$$

Da nun die sechs Winkel der beyden Dreyecke ABD und BED zusammen 4 R. betragen, so betragen die zwey Winkel ADB und BDE zusammen noch mehr als 2 R. Also ist ADE, als Ergänzung dieser beyden Winkel zu 4 R., ein Winkel, der kleiner als 2 R. ist. Folglich liegen AD und DE nicht in gerader Linie.

Man ziehe die gerade Linie AE, so ist

$$AD + DE > AE$$

also auch, da DB = DE ist,

$$AD + DB > AE.$$

Nun ist aber auch, da CH $=$ CB ist,

$$AH = AC + CH = AC + CB$$

und

$$AC + CB = AD + DB$$

also

$$AH = AD + DB$$

folglich auch

$$AH > AE.$$

Es weicht also AH von dem Perpendikel AB weiter ab, als AE von demselben abweicht (Art. 170). Mithin ist auch

$$BH > BE.$$

Man fälle endlich aus C und D die Perpendikel CF und DG auf HE, so werden BH und BE durch dieselben in F und G halbirt; folglich ist auch

$$BF > BG.$$

Nun ist BF die Höhe des △ ABC und BG die Höhe des △ ABD. Folglich ist, da beyde Dreyecke dieselbe Grundlinie AB haben,

$$\triangle ABC > \triangle ABD.$$

(Legendre IV, app. prop. 1).

Anm. Legendre übergeht den Theil des Beweises, durch welchen dargethan wird, daß ADE keine gerade Linie ist. Beym Vortrage für Schüler mag es in den meisten Fällen gut seyn, ihm darin nachzuahmen. Um dann den Beweis zu vermeiden, daß ACH eine gerade Linie ist, verlängere man AC, nehme CH $=$ CB und ziehe BH. Dann ist W. CAB $+$ CHB $=$ CBA $+$ CBH $=$ 1 R., u. s. w.

Art. 174. Lehrs. Wie Art. 172.

Bew. (Fig. 174). ABC und ABD seyen zwey Dreyecke, welche auf derselben Grundlinie AB stehen, und gleichen Inhalt haben. Im △ ABC seyen die Seiten AC und BC einander gleich, im △ ABD seyen AD und BD ungleich, und zwar AD $>$ BD.

Man ziehe durch B das Perpendikel HE auf AB, schneide darauf, von C aus, CH $=$ CB und, von D aus, DE $=$ DB

ab, ziehe AH und AE, und fälle aus C und D die Perpendikel CF und DG auf HE; so sind BF und BG die Höhen der beyden Dreyecke ABC und ABD, wenn AB deren Grundlinie ist. Da die beyden Dreyecke ABC und ABD gleichen Inhalt und gleiche Grundlinie haben, so haben sie auch gleiche Höhen; mithin ist

$$BF = BG$$

Da die beyden Dreyecke BHC und BED gleichschenklig sind, so gehen die Perpendikel CF und DG durch die Mitten der Grundlinie BH und BE, oder es ist BH = 2. BF und BE, = 2. BG. Es ist also auch

$$BH = BE.$$

In den beyden Dreyecken ABH und ABE ist AB = AB BH = BE und W. ABH = ABE; also ist △ ABH ≅ ABE; mithin AH = AE.

Da in dem △ ABH bey B ein rechter Winkel ist, so ist ebenfalls

$$W.\ BAH + BHA = 1\ R.$$

In den Dreyecken CAB und CBH ist W. CAB = CBA und W. CBH = CHB. Es macht also auch, da W. CBA + CBH = 1 R. ist,

$$W.\ CAB + CHB = 1\ R.$$

Es muß daher der Punkt C auf die gerade Linie AH fallen, weil sonst die beyden W. CAB und CHB zusammen entweder weniger oder mehr betragen müßten, als die beyden W. BAH und BHA zusammen genommen.

Es ist also

$$AH = AC + CH$$

oder

$$AH = AC + CB.$$

Da eben so in dem △ ABE bey B ein rechter Winkel ist, so ist auch

$$W.\ BAE + BEA = 1\ R.$$

In den beyden Dreyecken BAD und BDE ist aber, da BD < AD ist,

$$W.\ BAD < ABD$$

und, da BD = DE ist,

W. DEB = DBE

also, da ABD + DBE = 1 R. ist,

W. BAD + DEB < 1 R.

Es muß daher der Punkt D innerhalb des Dreyecks ABE fallen, weil die beyden W. BAD und DEB zusammen genommen weniger betragen, als die beyden W. BAE und BEA zusammen genommen.

Daher ist

$$AE < AD + DE$$

oder

$$AE < AD + DB$$

Nun war aber AH = AE. Folglich ist

$$AC + CB < AD + DB$$

folglich auch

$$AB + AC + CB < AB + AD + DB.$$

Das gleichschenklige Dreyeck ABC hat also einen kleineren Umfang als das △ ABD, das mit ihm auf derselben Grundlinie AB steht, und gleichen Inhalt hat.

Art. 175. Lehrs. Wie Art. 171.

Bew. (Fig. 175). ABC und BCD seyen zwey Dreyecke von gleichem Umfange, welche auf derselben Grundlinie BC stehen. Im △ ABC seyen die beyden Seiten BA und AC einander gleich, im △ BDC seyen die Seiten BD und DC ungleich. Da beyde Dreyecke gleichen Umfang, und die eine Seite BC gleich haben, so ist die Summe der beyden andern Seiten in beyden Dreyecken ebenfalls gleich, oder es ist BA + AC = BD + DC.

Der Punkt D kann nicht innerhalb des △ BAC oder auf eine seiner Seiten fallen, weil sonst BA + AC > BD + DC wäre. Er fällt also außerhalb des △ BAC.

Man verlängere die dem Punkte D gegen über liegende BA, mache AF = AC, und ziehe FD und AD; so ist

$$BD + DF > BF \text{ (§. 53)}$$

also auch

$$BD + DF > BA + AC$$

daher auch, da $BA + AC = BD + DC$ ist,

$$BD + DF > BD + DC$$

mithin

$$DF > DC.$$

In den beyden Dreyecken FAD und DAC ist nun $AF = AC$, $AD = AD$, aber $DF > DC$; folglich ist auch W. $FAD > DAC$ (§. 54); daher $FAD + DAC$ oder W. $FAC > 2. DAC$.

Es ist aber W. $FAC = ABC + ACB = 2. ACB$ (§. 43).

Also ist $2. ACB > 2. DAC$ oder W. $ACB > DAC$.

Man mache nun W. $CAG = ACB$, so ist AG ‖ CB (§. 19), und da W. $DAC < CAG$ ist, so fällt AD zwischen AC und AG.

Man verlängere die CD bis sie die AG in G trifft, und ziehe BG, so ist, da BDC nur ein Theil von BCG ist,

$$\triangle BGC > \triangle BDC.$$

Es ist aber

$$\triangle ABC = BGC \text{ (§. 69)}$$

Folglich ist

$$\triangle ABC > BDC.$$

(Pappus lib. V, prop. 5).

Art. 176. Lehrs. Wie Art. 172.

Bew. (Fig. 175). ABC und BCG seyen zwey Dreyecke, die auf derselben Grundlinie BC stehen und gleichen Inhalt, folglich auch gleiche Höhe haben (oben S. 306). Im △ ABC seyen die Seiten BA und AC einander gleich, im △ BCG seyen BG und GC ungleich.

Man verlängere BA, mache $AF = AC$ und ziehe AG und FG.

Da die beyden △ ABC und BCG gleiche Grundlinie BC und gleiche Höhe haben, so ist AG, welche die Spitzen beyder Dreyecke verbindet, der BC parallel (oben S. 306),

also W. GAC = ACB (§. 17) = ABC (§. 43) = FAG. Ferner ist AF = AC und AG = AG, also △ FAG ≅ CAG; daher FG = GC.

Nun ist

$$BG + FG > BA + AF \text{ (§. 53)}$$

also auch

$$BG + GC > BA + AC.$$

Folglich auch

$$BC + BG + GC > BC + BA + AC.$$

Art. 177. Lehrs. Von zwey ungleichseitigen Dreyecken, die auf derselben Grundlinie stehen, und denselben Umfang haben, ist dasjenige das kleinere, in welchem die beyden andern Seiten am meisten von den beyden Seiten des auf derselben Grundlinie verzeichneten, denselben Umfang habenden, gleichschenkligen Dreyecks abstehen.

Bew. (Fig. 176). BCD und BCE seyen zwey ungleichseitige Dreyecke, die auf derselben Grundlinie BC stehen, und denselben Umfang haben. Da die eine Seite BC in beyden gleich ist, so ist also auch die Summe der beyden andern Seiten in beyden gleich; oder es ist BD + DC = BE + EC.

BAC sey ein auf derselben Grundlinie verzeichnetes, denselben Umfang habendes, gleichschenkliges Dreyeck; BE weiche mehr als BD von BA ab, so wird BE über die Seite DC hinaus reichen und dieselbe in einem Punkte m durchschneiden, weil BE + EC = BD + DC, hingegen Bm + mC < BD + DC ist, und E noch weniger innerhalb des △ BCD fallen kann. Es wird also auch CE mehr als CD von CA abweichen.

Von den beyden ungleichen Seiten BD und DC des △ BCD verlängere man die längere BD, mache DK = DC und ziehe DE und EK.

Es ist

$$BE + EK > BD + DK \text{ (§. 53)}$$
$$\text{oder} > BD + DC$$
$$\text{oder} > BE + EC$$

also

$$EK > EC.$$

In den beyden Dreyecken KDE und EDC ist nun DK = DC, DE = DE aber EK > EC, also ist auch (§. 54) W. KDE > EDC; daher W. KDE + EDC oder W. KDC > 2. EDC, also

$$W.\ EDC < \tfrac{1}{2}\ KDC.$$

Ferner ist W. DCB > ACB
oder > ABC
oder > DBC

also auch, da W. KDC = DBC + DCB ist.

$$W.\ DCB > \tfrac{1}{2}\ KDC.$$

Um so mehr ist also

$$W.\ EDC < DCB.$$

Man mache W. CDL = DCB, so ist DL ll CB, und DE fällt zwischen DL und DC. Man verlängere also CE bis sie die DL in L durchschneidet, und ziehe BL, so ist

$$\triangle\ BCE < BCL.$$

Nun ist aber

$$\triangle\ BCL = BCD\ (§.\ 69)$$

folglich ist

$$\triangle\ BCE < BCD.$$

(Pappus lib. V, prop. 5).

Anm. Pappus trägt die beyden Sätze Art. 176 und 177 als einen Lehrsatz vor: „Unter allen Dreyecken, welche denselben Umfang und dieselbe Grundlinie haben, ist das gleichschenklige das größte; und das, welches dem gleichschenkligen näher kommt, ist immer größer.“

Art. 178. Lehrs. Unter allen Dreyecken von zwey gegebenen Seiten hat dasjenige den größten Inhalt, das zwischen den gegebenen Seiten einen rechten Winkel einschließt.

Bew. (Fig. 176). In den beyden Dreyecken ABC und ABD sey AB = AB und BC = BD; der Winkel ACB sey ein rechter, dagegen der W. ABD ein schiefer, einrley,

ob ein spitzer oder stumpfer Winkel: so ist zu beweisen, daß $\triangle$ ABC $>$ ABD sey.

Man ziehe durch D die Linie DE ll AB, bis sie die BC oder deren Verlängerung in einem Punkte E trifft, und ziehe AE.

Da W. ABE ein rechter, und DE ll AB ist, so ist auch W. DEB ein rechter Winkel. Mithin ist DB $>$ BE (§. 52), also auch, da BC $=$ BD ist, BC $>$ BE.

Die beyden Dreyecke ABC und ABE haben einerley Grundlinien AB, aber verschiedene Höhen. Die Höhe von ABC ist $=$ BC und die Höhe von ABE $=$ BE. Da nun BC $>$ BE ist, so ist auch $\triangle$ ABC $>$ ABE (§. 71).

Die beyden Dreyecke ABC und ABD haben dieselbe Grundlinie AB, und, da sie zwischen denselben Parallellinien AB und DE liegen, auch einerley Höhe, sind also einander gleich.

Folglich ist auch $\triangle$ ABC $>$ ABD.

(Th. Simpson p. 197).

Anm. Oder man fälle aus D das Perpendikel DF auf AB oder deren Verlängerung, so ist DF die Höhe des in B schiefwinkligen $\triangle$ ABD, und BC die Höhe des in B rechtwinkligen $\triangle$ ABC, wenn AB deren gemeinschaftliche Grundlinie ist. Nun ist BC $=$ BD und BD $>$ DF, also BC $>$ DF. Das $\triangle$ ABC hat also bey gleicher Grundlinie eine größere Höhe als das $\triangle$ ABD, ist folglich größer als dieses. (Legendre IV, prop. 3).

Art. 179. Lehrs. Eine geradlinige Figur von gegebenem Umfange und gegebener Seitenzahl, wenn deren Seiten ungleich sind, ist noch nicht so groß, als sie bey demselben Umfange und bey derselben Seitenzahl werden kann [Art. 171].

Bew. (Fig. 177). In der geradlinigen Figur ABCFE sey CF nicht $=$ FE. Man ziehe CE, und beschreibe darauf das gleichschenklige Dreyeck EDC, in welchem ED $=$ DC und ED $+$ DC $=$ EF $+$ FC; so ist, da die beyden Dreyecke

EDC und EFC auf derselben Grundlinie EC stehen und gleichen Umfang haben, das gleichschenklige △ EDC größer als das △ EFC (Art. 171).

Es ist also auch die Figur ABCDE größer als die Figur ABCFE, welche dieselbe Seitenzahl und denselben Umfang hat.

So lange in der Figur irgend zwey an einander liegende Seiten einander noch nicht gleich sind, läßt sich also eine andere Figur von demselben Umfange und derselben Seitenzahl construiren, welche größer als jene ist. Wenn in einer geradlinigen Figur von gegebenem Umfange und gegebener Seitenzahl die Seiten ungleich sind, so ist sie folglich noch nicht so groß, als sie bey demselben Umfange und derselben Seitenzahl werden kann.

Anm. Es wäre unrichtig, wenn man hieraus schließen wollte, daß unter allen Figuren von gegebener Seitenzahl und von gegebenem Umfange die gleichseitige die größte sey. Denn es kommt hier nicht bloß auf die verhältnißmäßige Größe der Seiten, sondern auch auf deren Lage gegen einander an. Ein gleichseitiges Sechseck z. B. ließe sich so in die Länge ziehen, daß der von den sechs Seiten eingeschlossene Raum zu einer geraden Linie verschwindet. — Obiger Lehrsatz hätte auch so ausgesprochen werden können: „Die größte geradlinige Figur unter allen, welche denselben Umfang und dieselbe Seitenzahl haben, ist gleichseitig."

---

a. Aufg. Ein Parallelogramm zu verfertigen, das einem gegebenen Parallelogramm gleich, und dessen Seiten alle doppelt so groß als des gegebenen seyen.

b. Aufg. Ein Parallelogramm zu verfertigen, das halb so groß als ein gegebenes sey, und dessen Seiten alle doppelt so groß als des gegebenen seyen.

Anm. Nach §. 96 läßt sich die Aufgabe allgemein stellen: ein Parallelogramm zu verfertigen, das, kleiner als ein gegebenes, zu diesem ein gegebenes Verhältniß habe, und dessen Seiten,

größer als des gegebenen, zu diesen ein gegebenes Verhältniß haben (Pappus fol. 23).

c. Lehrs. Parallel-Trapeze mit gleichen Parallelseiten und gleicher Höhe sind gleich groß. (Hegenberg S. 93; Clavius S. 67).

d. Aufg. Drey Paar gleichschenkliger Dreyecke von gleichen Schenkeln aber verschiedener Grundlinie zu verfertigen:

1) wo das Dreyeck auf der größeren Grundlinie größer als das Dreyeck auf der kleineren ist;

2) wo das Dreyeck auf der größeren Grundlinie gleich dem Dreyeck auf der kleineren ist;

3) wo das Dreyeck auf der größeren Grundlinie kleiner als das Dreyeck auf der kleineren ist. (Pappus fol. 78).

Zu §. 73.

Anm. Um das Verhältniß zweyer gegebenen geraden Linien ohne Beyhülfe eines verjüngten Maßstabes in Zahlen anzugeben, kann man sich (nach Tob. Mayer's gründlichem und ausführlichem Unterricht zur practischen Geometrie, 3te Aufl. Th. I. S. 303) folgenden Verfahrens bedienen.

Es sey (Fig. 178) das Verhältniß der beyden geraden Linien AB und CD in Zahlen anzugeben. Man nehme die kleinere CD in den Zirkel, und trage sie auf der größeren AB so oft auf als es geht, hier 2 mal, nämlich von A nach E und von E nach F. Es ist also

$$\text{I) } AB = 2.\,CD + FB.$$

Den Rest FB, der kleiner als CD, also auch kleiner als AE ist, trage man auf AE so oft auf, als es geht, hier 1 mal, nämlich von A nach a. Es ist also

$$\text{II) } CD = 1.\,FB + aE.$$

Den Rest aE trage man von Neuem auf Aa so oft auf, als es geht, hier 4 mal, nämlich von A nach α, von α nach β, von β nach γ und von γ nach δ. Also ist

$$\text{III) } FB = 4.\,A\alpha + \delta a.$$

δa ist nun schon so klein, daß man keinen merklichen Fehler begeht, wenn man sein Verhältniß zu Aα nach dem Augenmaß schätzt. Wir wollen es $= \frac{1}{5}$ Aα setzen; so ist (aus III)

$$FB = 4.\ A\alpha + \frac{1}{5}\ A\alpha = \frac{21}{5}\ A\alpha$$

also (aus II)

$$CD = 1.\ FB + aE = \frac{21}{5}.\ A\alpha + A\alpha = \frac{26}{5}\ A\alpha$$

und (aus I)

$$AB = 2.\ CD + FB = \frac{52}{5}\ A\alpha + \frac{21}{5}\ A\alpha = \frac{73}{5}\ A\alpha.$$

Die beyden Linien AB und CD verhalten sich also wie 73 zu 26.

(Hätten wir δa etwa $= \frac{2}{5}$ Aα schätzen müssen, so wäre FB $= \frac{22}{5}$ Aα, CD $= \frac{27}{5}$ Aα und AB $= \frac{76}{5}$ Aα gewesen; und AB hätte sich zu CD wie 76 zu 27 verhalten).

Auf ähnliche Art läßt sich das Verhältniß von zwey gegebenen Kreisbögen, die zu gleichen Halbmessern gehören, in Zahlen angeben. Wären AB und CD zwey solche Kreisbögen gewesen, so würden sich dieselben ebenfalls wie 73 zu 26 verhalten. — Daher läßt sich auch die Größe eines gegebenen Kreisbogens ohne Transporteur in Graden bestimmen, indem man mit demselben Halbmesser einen Kreisbogen von 60°, d. h, einen Kreisbogen, dessen Sehne dem Halbmesser gleich ist (§. 132), beschreibt, das Verhältniß zwischen diesem und dem gegebenen sucht, und nun ein Regeldetri-Exempel ansetzt. Es sey AB ein solcher Bogen von 60° und CD ein anderer gegebener Kreisbogen von demselben Halbmesser gewesen, und das Verhältniß derselben = 73 : 26 bestimmt worden; so hätte man das Regeldetri-Exempel

$$73 : 26 = 60^{\circ} : x;$$

also wäre x oder der gegebene Kreisbogen

$$= 21\ \frac{27^{\circ}}{73} = 21^{\circ}\ 22'\ 12'',$$

wo natürlich die Secunden nicht mehr richtig seyn können.

Es ließe sich auch das Verhältniß von zwey gegebenen geradlinigen Figuren, ohne Anwendung des verjüngten Maß-

stabes, in Zahlen bestimmen, wenn man beyde Figuren in Quadrate verwandelte, das Verhältniß der Seiten dieser Quadrate auf die beschriebene Art in Zahlen bestimmte, und die erhaltenen Zahlen wieder quadrirte.

Nach §. 75.

Die 10 ersten Sätze aus dem IIten Buche Euklids.

Die Alten haben sehr umständlich eine Menge von Sätzen mit Beyhülfe von Figuren bewiesen, die wir jetzt sehr kurz durch ein leichtes Rechnungs-Exempel mit Buchstaben zu beweisen pflegen. Unsere Art zu beweisen beruht auf dem streng bewiesenen Satze, daß sich Rechtecke wie die Producte der zwey an einander liegenden Seiten verhalten. Ich setze die 10 ersten Sätze aus Euklids IItem Buche, nach der Art, wie wir sie jetzt zu behandeln pflegen hierher. Die Propositionen sind aus der Uebersetzung von Hauff.

1. Satz. Wenn von zwey geraden Linien die eine in beliebig viele Abschnitte getheilt wird, so ist das Rechteck aus den beyden Linien den Rechtecken aus der ungetheilten Linie und jedem der Abschnitte gleich.

Oder es ist

$$a \times (b + c + d + \text{etc.}) = ab + ac + ad + \text{etc.}$$

2. Satz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben geschnitten wird, so sind die Rechtecke aus der ganzen Linie und jedem der Abschnitte dem Quadrate der ganzen Linie gleich.

Oder, wenn $a = b + c$, so ist

$$a^2 = ab + ac.$$

Bew. Man multiplicirt nämlich auf beyden Seiten mit a.

3. Satz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben geschnitten wird, so ist das Rechteck aus der ganzen Linie und einem der beyden Abschnitte dem Rechtecke aus den beyden Abschnitten und dem Quadrate des gedachten Abschnittes gleich.

Oder, wenn $a = b + c$, so ist

$$ac = bc + c^2.$$

Bew. Man multiplicire nämlich auf beyden Seiten mit c.

4. Satz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben getheilt wird, so ist das Quadrat der ganzen Linie den Quadraten der beyden Abschnitte und dem doppelten Rechtecke aus beyden Abschnitten gleich.

Oder es ist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

5. Satz. Wenn eine gerade Linie in gleiche und ungleiche Theile getheilt wird, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten sammt dem Quadrate des Abschnitts zwischen den Theilungspunkten dem Quadrate der halben Linie gleich.

Oder es ist

$$(a - b)\,b + (\tfrac{1}{2}\,a - b)^2 = (\tfrac{1}{2}\,a)^2$$

Bew. Es ist nämlich

$$(a - b)\,b + (\tfrac{1}{2}\,a - b)^2$$
$$= ab - b^2 + (\tfrac{1}{2}\,a)^2 - ab + b^2$$
$$= (\tfrac{1}{2}\,a)^2.$$

Anm. Bekannter ist dieser Satz unter folgender Form. Man bezeichne die Hälfte der geraden Linie mit a, den größeren Abschnitt derselben mit $a + b$, so ist der kleinere $= a - b$, und es ist

$$(a + b)\,(a - b) + b^2 = a^2$$

oder

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2.$$

6. Satz. Wenn eine gerade Linie halbirt, und ihr eine andere in gleicher Richtung angesetzt wird, so ist das Rechteck aus der aus der ganzen und der angesetzten bestehenden und der angesetzten Linie sammt dem Quadrate der halben Linie dem Quadrate der aus der halben und der angesetzten bestehenden Linie gleich.

Oder es ist

$$(a + b)\,b + (\tfrac{1}{2}\,a)^2 = (\tfrac{1}{2}\,a + b)^2$$

Bew. Es ist nämlich

$$(a + b)\,b + (\tfrac{1}{2}\,a)^2 = ab + b^2 + \tfrac{1}{4}\,a^2$$

und

$$(\tfrac{1}{2}\,a + b)^2 = \tfrac{1}{4}\,a^2 + ab + b^2.$$

7. Satz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben in einem Punkte geschnitten wird, so sind die Quadrate der ganzen Linie und eines der Abschnitte dem doppelten Rechtecke aus der ganzen Linie und dem gedachten Abschnitte sammt dem Quadrate des andern Abschnitts gleich.

Oder, wenn man die beyden Abschnitte mit a und b, also die ganze Linie mit a + b bezeichnet, so ist

$$(a + b)^2 + a^2 = 2\,(a + b)\,a + b^2$$

Bew. Es ist nämlich

$$(a + b)^2 + a^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2$$
$$= 2\,a^2 + 2ab + b^2$$

und

$$2\,(a + b)\,a + b^2 = 2\,a^2 + 2\,ab + b^2$$

8. Satz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben in einem Punkte geschnitten wird, so ist das vierfache Rechteck aus der ganzen Linie und einem der Abschnitte sammt dem Quadrate des andern Abschnitts dem Quadrate der aus der ganzen und dem erst gedachten Abschnitte bestehenden Linie gleich.

Oder es ist

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2.$$

Bew. Es ist nämlich $4ab + (a - b)^2 = 4ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

9. Satz. Wenn eine gerade Linie in gleiche und ungleiche Theile getheilt wird, so sind die Quadrate der ungleichen Abschnitte doppelt so groß, als das Quadrat der halben Linie und des Abschnitts zwischen den Theilungspunkten.

Oder es ist

$$(\tfrac{1}{2}\,a + b)^2 + (\tfrac{1}{2}\,a - b)^2 = 2.\,(\tfrac{1}{2}\,a)^2 + 2\,b^2$$

Bew. Es ist nämlich

$$(\tfrac{1}{2}a + b)^2 + (\tfrac{1}{2}a - b)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 + ab + b^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - ab + b^2$$
$$= \tfrac{1}{2}a^2 + 2b^2$$

und

$$2.(\tfrac{1}{2}a)^2 + 2b^2 = 2.\tfrac{1}{4}a^2 + 2b^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + 2b^2$$

10. Satz. Wenn eine gerade Linie halbirt und ihr eine andere in gleicher Richtung angesetzt wird, so ist das Quadrat der aus der ganzen und der angesetzten bestehenden Linie sammt dem Quadrate der angesetzten doppelt so groß, als das Quadrat der halben und der aus der halben und der angesetzten bestehenden Linie.

Oder es ist

$$(a + b)^2 + b^2 = 2.(\tfrac{1}{2}a)^2 + 2.(\tfrac{1}{2}a + b)^2.$$

Bew. Es ist nämlich

$$(a + b)^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + 2b^2$$

und

$$2(\tfrac{1}{2}a)^2 + 2.(\tfrac{1}{2}a + b)^2$$
$$= 2.\tfrac{1}{4}a^2 + 2.(\tfrac{1}{4}a^2 + ab + b^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}a^2 + 2ab + 2b^2$$
$$= a^2 + 2ab + 2b^2.$$

Nach §. 77.

Art. 180. Lehrs. Wenn man aus einem beliebigen Punkte innerhalb eines Dreyecks Perpendikel auf die drey Seiten fällt, und jedes dieser Perpendikel durch das Perpendikel dividirt, das auf die nämliche Seite aus der gegen über liegenden Spitze gefällt wird: so ist die Summe der drey Quotienten = 1.

Bew. (Fig. 179). In dem △ ABC seyen aus dem beliebigen Punkte G die Perpendikel GH, GI und GK auf die Seiten BC, CA und AB gefällt; und AD, BE und CF seyen

Perpendikel aus den Spitzen A, B und C auf dieselben Seiten: so ist zu beweisen, daß

$$\frac{GH}{AD} + \frac{GI}{BE} + \frac{GK}{CF} = 1$$

ist.

Man ziehe GA, GB und GC, so ist (§. 77)

$$\triangle\, BCG = \tfrac{1}{2}\, BC.\, GH$$

$$\triangle\, ACG = \tfrac{1}{2}\, AC.\, GI$$

und

$$\triangle\, ABG = \tfrac{1}{2}\, AB.\, GK$$

also

$$\triangle\, BCC + ACG + ABG = \tfrac{1}{2}\, BC.\, GH + \tfrac{1}{2}\, AC.\, GI + \tfrac{1}{2}\, AB.\, GK$$

oder

$$\triangle\, ABC = \tfrac{1}{2}\, BC.\, GH + \tfrac{1}{2}\, AC.\, GI + \tfrac{1}{2}\, AB.\, GK$$

also

$$2.\, \triangle\, ABC = BC.\, GH + AC.\, GI + AB.\, GK.$$

Es ist aber auch (§. 77)

$$\triangle\, ABC = \tfrac{1}{2}\, BC.\, AD$$

oder

$$2.\, \triangle\, ABC = BC.\, AD.$$

Eben so ist

$$2.\, \triangle\, ABC = AC.\, BE$$

und

$$2.\, \triangle\, ABC = AB.\, CF.$$

Die Werthe BC. AD, AC. BE und AB. CF sind also auch unter einander gleich, und in Hinsicht auf Größe ist es einerley, welchen von denselben man setzt. Dividirt man nun Gleiches durch Gleiches, so erhält man, da

$$2.\, \triangle\, ABC = BC.\, GH + AC.\, GI + AB.\, GK$$

ist,

$$\frac{2.\, \triangle\, ABC}{2.\, \triangle\, ABC} = \frac{BC.\, GH}{BC.\, AD} + \frac{AC.\, GI}{AC.\, BE} + \frac{AB.\, GK}{AB.\, CF}$$

oder

$$1 = \frac{GK}{AD} + \frac{GI}{BE} + \frac{GK}{CF}$$

(Langsdorf's Einleitung S. 20).

Anm. 1. Der Satz gilt auch noch, wenn der beliebig angenommene Punkt auf einer Seite des Dreyecks liegt. K sey ein solcher Punkt, und Km und Kn seyen senkrecht auf AC und BC, so ist

$$\frac{Km}{BE} + \frac{Kn}{AD} = 1.$$

Es ließe sich daraus, als Material des Unterrichts, ein besonderer Lehrsatz machen, um den zu beweisen, man die Hülfslinie KC ziehen würde.

Anm. 2. Wenn der Punkt G außerhalb des Dreyecks liegt, wie Fig. 180, so ist

$$\triangle\ ABC = ABG + BCG - ACG$$

also

$$\frac{GK}{CF} + \frac{GH}{AD} - \frac{HI}{BE} = 1.$$

Auch aus diesem Satze ließe sich ein besonderer Lehrsatz machen.

Nach §. 78.

Art. 181. Aufg. Von einer gegebenen geradlinigen Figur ein Stück von verlangtem Inhalte abzuschneiden.

Erste Aufl. Mit Beyhülfe der Arithmetik.

ABCDEFG (Fig. 181) sey die gegebene geradlinige Figur. Man ziehe die Diagonale AC, und messe das Dreyeck ABC (§. 77).

Der Inhalt des △ ABC sey kleiner als das von der Figur abzuschneidende Stück.

Man ziehe die Diagonale AD, messe das △ ACD, und addire seinen Inhalt zu ABC; so erhält man den Inhalt des Vierecks ABCD.

Der Inhalt von ABCD sey wieder kleiner als das von der Figur abzuschneidende Stück.

Man ziehe von Neuem die Diagonale AE, messe das △ ADE, und addire seinen Inhalt zu ABCD; so erhält man den Inhalt des Fünfecks ABCDE.

Wäre nun der Inhalt von ABCDE wieder kleiner als das von der Figur ABCDEFG abzuschneidende Stück, so müßte man das bisherige Verfahren noch weiter fortsetzen.

Wäre ABCDE = dem abzuschneidenden Stück, so wäre das Verlangte geschehen.

Es sey nun aber ABCDE größer als das abzuschneidende Stück.

Man subtrahire den Inhalt von ABCD von dem Inhalte des abzuschneidenden Stücks; so erhält man den Inhalt eines Stücks, das kleiner als ADE ist, und das noch zu ABCD hinzugesetzt werden muß, um das verlangte Stück abzuschneiden.

Es läßt sich dieses Stück in Gestalt eines Dreyecks abschneiden, dessen Grundlinie AD ist.

Man multiplicire also (vgl. Anm. 2 zu Art. 164) den Inhalt dieses abzuschneidenden Dreyecks mit 2, und dividire durch die Grundlinie AD, so erhält man die Höhe des abzuschneidenden Dreyecks.

Man errichte in D auf AD das Perpendikel DH, mache DH der eben gefundenen Höhe gleich, ziehe durch H, der AD parallel, die HI, welche die ED in I trifft, und ziehe AI, so ist ADI das abzuschneidende Dreyeck.

Und ABCDI ist das verlangte von ABCDEFG abzuschneidende Stück.

(Langsdorf's Anfangsgründe S. 199).

Zweyte Auflösung. Rein geometrisch, ohne Beyhülfe der Arithmetik. [Art. 168].

ABCDEFG [Fig. 181) sey die gegebene geradlinige Figur, von welcher ein Stück = dem gegebenen Quadrate MNOP abgeschnitten werden soll.

Man ziehe die Diagonale AC, und verwandle, nach Art. 168, das △ ABC in das Rechteck MPQR, dessen eine Seite

MP = der Seite des gegebenen Quadrats ist. Die andere Seite des gegebenen Rechtecks sey MQ < MN.

Man ziehe ferner die Diagonale AD und verwandle das △ ACD in das Rechteck QRTS, dessen eine Seite QR = der Seite des gegebenen Quadrats ist. Die andere Seite des gefundenen Rechtecks sey QS.

Die beyden Rechtecke MQRP und QRTS machen zusammen das Rechteck MSTP aus, dessen eine Seite MP = der Seite des gegebenen Quadrats ist. Die andere Seite desselben MS sey wieder < MN.

Man ziehe ferner die Diagonale AE, und verwandle das △ ADE in das Rechteck STXW, dessen eine Seite ST = der Seite des gegebenen Quadrats ist. Die andere Seite des gefundenen Rechtecks sey SW.

Die beyden Rechtecke MSTP und STXW machen zusammen das Rechteck MWXP aus, dessen eine Seite MP = der Seite des gegebenen Quadrats ist. Die andere Seite desselben ist MW.

Wäre MW < MN, so müßte man das bisherige Verfahren noch weiter fortsetzen.

Wäre MW = MN = der Seite des gegebenen Quadrats, so wäre das Rechteck MPXW dem gegebenen Quadrate gleich, also ABCDE das verlangte abzuschneidende Stück.

Es sey nun aber MW > MN; so ist das Rechteck MPXW größer als das Quadrat MNOP, also ABCDE größer als das abzuschneidende Stück.

Statt des △ ADE, das dem Rechteck STXW gleich ist, darf von dem Rest ADEFG der gegebenen geradlinigen Figur nur noch ein Stück abgeschnitten werden, das dem Rechteck STON gleich ist.

Da das noch abzuschneidende, dem Viereck ABCD hinzuzufügende, Stück kleiner als △ ADE ist, so schneide man von diesem Dreyeck ein Stück in Gestalt eines Dreyecks ab, das auf der Grundlinie AD steht, und seine Spitze auf der Seite DE hat.

Man verwandle das Rechteck STON, nach Art. 168 Anm. 1, in ein Parallelogramm, das die Seite AD und den Winkel ADE hat.

Auf DE nehme man DI zweymal so groß als die andere Seite des eben gefundenen Parallelogramms, und ziehe AI, so ist das △ ADI = dem eben gefundenen Parallelogramm = dem Rechteck STON.

Es ist also

$$ABCD = MPTS$$
$$ADI = STON$$

folglich

$$ABCD + ADI = MPTS + STON$$

oder

$$ABCDI = MNOP = \text{dem gegebenen Quadrate.}$$

(vgl. Euklid I. Satz 42—45).

Anm. 1. Daß das △ ADI dem Parallelogramm gleich ist, das mit ihm den Winkel D und die Seite AD gemein hat, und dessen andere Seite = $\frac{1}{2}$ DI ist, läßt sich so beweisen: Man denke sich das Parallelogramm beschrieben, so daß seine Seite DA auf des Dreyecks Seite DA, und sein Winkel D auf D fällt; so fällt die andere Seite des Parallelogramms, die wir Dx nennen wollen, auf DI. Betrachtet man nun Dx und DI als die Grundlinien vom Parallelogramm und Dreyeck, so haben beyde gleiche Höhe, nämlich das Perpendikel aus A auf DI. Da nun die Grundlinie des Dreyecks zweymal so groß ist als die Grundlinie des Parallelogramms, das mit ihm gleiche Höhe hat, so ist der Inhalt des Dreyecks dem Inhalt des Parallelogramms gleich.

Anm. 2. Daß man in Fällen der Anwendung mit der Beyhülfe der Arithmetik schneller und sicherer zum Zweck kommt, als ohne dieselbe, braucht wohl hier nicht erinnert zu werden. Bey Anwendungen auf dem Felde bedient man sich der landesüblichen Maße, um Linien zu messen, deren Größe man dann durch eine Zahl von Ruthen, Schuhen u. s. w.

ausdrückt. Der Inhalt wird dann durch eine Zahl in Quadratruthen, Quadratschuhen u. s. w. angegeben. Bey Anwendungen auf dem Papiere gebraucht man einen s. g. verjüngten Maßstab, mittelst dessen man die Linien in Zahlen ausdrückt.

Anm. 3. Mit Beyhülfe der Arithmetik läßt sich auch, nach obiger Aufgabe, eine jede geradlinige Figur in eine verlangte Anzahl einzelner Stücke theilen, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen. Man berechnet den Flächeninhalt der ganzen Figur, berechnet daraus, nach der Gesellschaftsrechnung, die Größe der einzelnen Theile, und schneidet nun einen nach dem andern ab. (Langsdorf's Anfangsgründe S. 200).

Ohne Beyhülfe der Arithmetik läßt sich das Nämliche bewerkstelligen, was ich hier nicht aus einander setzen will. Jedoch darf ich nicht unerinnert lassen, daß man hierzu der Aufgabe (§. 96. c.) bedarf, eine gegebene gerade Linie in eine verlangte Anzahl von Theilen zu theilen, die sich wie andere gegebene gerade Linien verhalten.

Art. 182. Aufg. Aus zweyen Seiten eines Dreyecks und seinem Inhalte das Dreyeck zu verzeichnen. (Fig. 182).

Erste Auflösung. Mit Beyhülfe der Arithmetik. MN und PQ seyen die gegebenen Seiten; der gegebene Inhalt des Dreyecks = a.

Man nehme die eine der beyden Seiten MN als Grundlinie des Dreyecks an, und berechne dessen Höhe

$$= \frac{2a}{MN}$$

Nun mache man AB = MN, errichte auf AB in B das Perpendikel BE, mache B = der gefundenen Höhe des Dreyecks, ziehe durch E die EF ‖ AB, und nehme, von A aus, die AD und AC = PQ, so daß die Endpunkte D und C auf EF fallen. Zieht man nun die geraden Linien AD, AB und AC, BC; so haben die beyden Dreyecke ABD und ABC die verlangten Eigenschaften.

(Langsdorf's Anfangsgründe S. 198).

Zweyte Auflösung. Ohne Beyhülfe der Arithmetik.

MN und PQ seyen die gegebenen Seiten, das Quadrat RSTV der gegebene Inhalt.

Man nehme die eine der beyden Seiten MN als Grundlinie des gesuchten Dreyecks an, und suche, wie in der Anm. 2 zu Art. 164, dieses Dreyecks Höhe.

Dann construire man wie in der ersten Auflösung.

Anm. Aehnlich ist die Auflösung, wenn des verlangten Dreyecks Grundlinie, und, Statt der zweyten Seite, der eine Winkel an derselben gegeben sind. (Langsd. ib. S. 199).

---

a. Lehrs. Der Flächeninhalt des Parallel-Trapezes ist gleich dem Product aus seiner Höhe in die halbe Summe seiner parallelen Seiten.

Zu §. 79.

Der Pythagoräische Lehrsatz. Art. 183 bis 201.

Kein Lehrsatz der Geometrie hat das Glück gehabt, daß seine Beweise so vervielfältigt wurden, wie der Pythagoräische. Vielleicht gibt es auch keinen, der es in didactischer Hinsicht in dem Grade verdient, als er. — Nicht nur suchen viele Verfasser von Lehrbüchern etwas darin, einen Beweis dieses Satzes aufzustellen, der entweder von eigner Erfindung oder weniger allgemein bekannt ist; nicht nur liefern mehrere Lehrbücher mehrfache Beweise desselben, wo dem Faden des Systemes einer genügt hätte; nicht nur thun dieses insbesondere die Commentatoren des Euklid: sondern es gibt sogar besondere Abhandlungen, welche ausschließlich dem Pythagoräischen Lehrsatze gewidmet sind, in welchen sich eine große Zahl seiner Beweise gesammelt finden. In den neuesten Zeiten haben J. J. J. Hoffmann und J. W. Müller dergleichen Sammlungen herausgegeben, und sich dadurch um den geometrischen Unterricht ein sehr großes Verdienst erworben. Wie sehr willkom-

men theils dem Lehrer der Mathematik, theils dem Liebhaber der Geometrie eine solche Zusammenstellung war, erhellt daraus, daß die Sammlung von Hoffmann in Zeit von zwey Jahren nach ihrer ersten Erscheinung schon eine zweyte Auflage erlebt hat. Als ältere Sammlungen führt Klügel in seinem mathematischen Wörterbuche III. S. 933, eine akademische Dissertation von Scherz und Stöber zu Strasbnrg 1743, und eine dergleichen von Lange und Jeke, Halle 1752, an. Da weder Vollständigkeit in Aufzählung aller Beweise, noch das Geschichtliche derselben zu meinem Zwecke gehört, so lag mir nicht viel daran, diese beyden älteren Abhandlungen zu Gesicht zu bekommen. Hoffmann hat, wie er am Ende der Vorerinnerung sagt, keine von beyden gesehen. Müller hat, wie er S. 13 anführt, die Dissertation von Scherz und Stöber sorgfältig benutzt.

Die Titel der beyden erwähnten neueren Abhandlungen sind diese:

Der Pythagoräische Lehrsatz, mit 32 theils bekannten, theils neuen Beweisen versehen, von Joh. Jos. Ign. Hoffmann. Mainz 1819. — Zweyte Ausgabe. Mainz 1821. (enthält noch einen 33, 34 und 35sten Beweis). Und

Systematische Zusammenstellung der wichtigen *) bisher bekannten Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes mit einer ausführlichen Theorie der Zahlendreyecke von Johann Wolfgang Müller. Nürnb. 1819. Auch unter dem Titel:

Mathematische und historische Beyträge und Ergänzungen zu Johann Joseph Ignaz Hoffmanns neuester Schrift: Der Pythagoräische Lehrsatz mit 32 Beweisen. Systematisch geordnet von J. W. Müller. Nürnb. 1819.

---

*) Besser: „wichtigern oder wichtigsten". Noch besser: „merkwürdigern". Denn nur der Lehrsatz selbst ist wichtig. Jeder einzelne Beweis desselben hat aber gerade dadurch aufgehört, wichtig zu seyn, weil es der Beweise so viele gibt. Denn jeder einzelne Beweis wird durch jeden anderen Beweis entbehrlich.

Die Hoffmann'sche Sammlung zerfällt in drey Abtheilungen: 1) Beweise nach Euklides; 2) Beweise nach Henry Boad; 3) vermischte Beweise. Sehr sinnreich vervielfältigt der Verfasser die Beweise dadurch, daß er sie für die verschiedenen möglichen Lagen der Quadrate auf den drey Seiten des Dreyecks, ob nach außen oder nach innen, führt. In Fig. 191 z. B. haben alle drey Quadrate ihre Lage nach außen; in Fig. 190 dagegen haben bloß die Quadrate der beyden Katheten ihre Lage nach außen, das Quadrat der Hypotenuse aber seine Lage nach innen. Bezeichnet man das Quadrat der Hypotenuse mit A, das Quadrat des größeren Katheten mit B, das Quadrat des kleineren Katheten mit C; so finden folgende mögliche Fälle Statt:

1) A nach außen, B nach außen, C nach außen.
2) A nach außen, B nach außen, C nach innen.
3) A nach außen, B nach innen, C nach außen.
4) A nach außen, B nach innen, C nach innen.
5) A nach innen, B nach außen, C nach außen.
6) A nach innen, B nach außen, C nach innen.
7) A nach innen, B nach innen, C nach außen.
8) A nach innen, B nach innen, C nach innen.

So gibt der Verfasser acht Beweise nach Euklides, und acht Beweise nach Henry Boad, zusammen 16. Die übrigen 16 Beweise trägt er unter der Rubrik vermischter Beweise vor. Worin das Kennzeichen eines Beweises nach Euklid besteht, gibt er nicht an. Beym Euklidischen Beweis wird aber das Quadrat der Hypotenuse in zwey Rechtecke getheilt, deren eines dem einen und das andere dem anderen Kathetenquadrat gleich ist; und die Gleichheit eines Rechtecks mit einem Kathetenquadrat wird dadurch dargethan, daß beyde zweymal so groß als zwey unter einander congruente Dreyecke sind. Dieses hätte also der Verfasser als Kennzeichen eines Beweises nach Euklides angeben können, nur daß es erlaubt ist, Statt zweyer congruenten Dreyecke, wo es die Construction gestattet, nur ein Dreyeck zu gebrauchen, das halb so groß als das eine Rechteck,

und zugleich halb so groß als das eine Kathetenquadrat ist. Zwey solcher Beweise nach Euklid siehe unten Art. 194 und 196. Wohl aber gibt der Verfasser das Kennzeichen eines Beweises nach Henry Boad an. Den Beweis des Henry Boad selbst siehe unten Art. 187. „Er ist (Hoffmann S. 21) von der Euklidischen Beweisart wesentlich verschieden und beruht im Allgemeinen auf dem Schlusse:

Wenn A — B = D, und auch
A — C = D ist, so muß auch
B = C seyn."

Einen Hoffmann'schen Beweis nach Henry Boad siehe unten Art. 186.

Die Zahl der Beweise in der gelehrten Müller'schen Abhandlung steigt auf 18. Das Systematische seiner Zusammenstellung besteht, wenn ich richtig verstanden habe (nach der Anmerkung zum 10ten Beweise, S. 53) darin, daß die 10 ersten Beweise nur solche Constructionen enthalten, in welchen bloß die beyden Kathetenquadrate als Quadrate beschrieben werden, von dem Viereck aber auf der Hypotenuse erst bewiesen werden muß, daß es ein Quadrat ist. Mit dem 11ten Beweise geht er zu den Constructionen über, bey welchen die drey Quadrate der drey Seiten des gegebenen rechtwinkligen Dreyecks unmittelbar beschrieben werden. Mit dem 16ten Beweise folgen (nach der Anm. zum 15ten Beweise, S. 64) noch diejenigen Beweisarten, die sich auf die Proportionalität der Linien und auf die Aehnlichkeit der Dreyecke gründen. Den Beweisen des eigentlichen Pythagoräischen Lehrsatzes gehen zwey Beweise des besonderen Falles voraus, da das rechtwinklige Dreyeck zugleich gleichschenklig ist. Ich theile dieselben, da sie als leichtere Uebungen für Schüler zweckmäßig gebraucht werden können, in Art. 183 und 184 mit. Den zweyten findet man, wie Müller in einer Anmerkung bemerkt, in Plato's Werken, und zwar in dem Dialog Menon, heuristisch vorgetragen.

Unter den nachfolgenden Beweisen konnten an dieser Stelle (zu §. 79) keine aufgenommen werden, welche die Aehnlichkeit der Dreyecke oder den Kreis voraus setzen. Diese werden in dem folgenden Bande da vorkommen, wo sie gründlich geführt werden können. — Auch habe ich, bey der Leichtigkeit, sich die Abhandlungen von Hoffmann und Müller zu verschaffen, nur solche Beweise aufgenommen, die dem Leser theils durch Anschaulichkeit, theils durch Kürze, theils durch Nettigkeit und Neuheit irgend ein Interesse gewähren, und dagegen solche ausgelassen, die entweder sehr weitläufig waren, oder sich von den aufgenommenen nur wenig unterschieden, oder wegen Mangels an Gleichförmigkeit (s. unten Anm. 4. zu Art. 194) geradezu dieser Stelle nicht werth waren.

A) Beweise des besonderen Falles, da das rechtwinklige Dreyeck zugleich gleichschenklig ist.

Art. 183. Lehrs. Im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreyeck ist das Quadrat der Hypotenuse zweymal so groß als das Quadrat eines Katheten.

Bew. (Fig. 183). ABC sey ein gleichschenkliges Dreyeck, rechtwinklig in A. Auf den beyden gleichen Seiten AB und AC seyen die Quadrate ABFG und ACIH beschrieben. Man ziehe die Diagonalen BG, CH und die gerade Linie GH.

Da bey A lauter rechte Winkel sind, so sind GAC und BAH gerade Linien.

Nun ist AH = AB, AC = AC und W. CAH = CAB, also $\triangle$ CAH $\cong$ CAB (§. 39), daher HC = BC, und W. ACH = ACB.

Eben so wird bewiesen, daß $\triangle$ GAH $\cong$ HAC und $\triangle$ BAG $\cong$ GAH, also auch, daß GH = HC und GB = GH ist.

Das Viereck GBCH ist also gleichseitig.

Da das $\triangle$ ABC gleichschenklig ist, so ist W. ACB = ABC. Nun ist bey A ein rechter Winkel; also ist auch noch)§. 28) ACB + ABC = 1 R.; mithin ACB = $\frac{1}{2}$ R. Daher

ist auch W. ACH, der = ACB ist, = $\frac{1}{2}$ R. Folglich ACB + ACH oder BCH = 1 R. Auf dieselbe Art wird von den drey übrigen Winkeln des Vierecks GBCH bewiesen, daß sie rechte Winkel sind. Das gleichseitige Viereck GBCH ist also ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse BC.

Da nun △ BFG ≅ ABG (§. 55) und ABG ≅ GAH, so ist △ BFG + ABG = ABG + GAH, oder

Quadrat ABFG = △ HBG.

Nun ist △ BCH = △ HBG (§. 55), also

Quadrat GBCH = △ BCH + △ HBG
= 2. △ HBG

folglich auch

Quadrat GBCH = 2 × Quadrat ABFG.

oder auch, da Quadrat ACIH = Quadrat ABFG ist,

Quadrat GBCH = 2 × Quadrat ACIH.

Art. 184. Lehrs. Wie Art. 183.

Bew. (Fig. 184). ABC sey das gleichschenklige Dreyeck, rechtwinklig in A.

Wenn man ein demselben congruentes Dreyeck DBC an die Hypotenuse BC ansetzt, so wird das Viereck ABDC ein Quadrat; denn alle Seiten dieses Vierecks sind unter einander gleich, dieses Viereck ist also ein Parallelogramm, das, da bey A ein rechter Winkel ist, lauter rechte Winkel hat (§. 18 und §. 57).

Das Quadrat ABDC ist das Quadrat eines Katheten.

Man verlängere AC nach E, so daß CE = AC, und beschreibe über AE das Quadrat AEFG.

Wenn man die Seiten BD und CD des Quadrats ABDC über D hinaus verlängert, bis sie die Seiten EF und GF des Quadrats AEFG in H und I treffen, so zerfällt dadurch das Quadrat AEFG in vier Rechtecke ABDC, CEHD, BDIG, IDHF.

In dem Rechteck CEHD ist CE = AC = CD. Das Rechteck CEHD ist also ein dem Quadrat ACDB congruentes Quadrat.

Da AG = AE und AB = AC, so ist auch AG — AB = AE — AC oder BG = CE = AC = BD. Das Rechteck BDIG ist also ebenfalls ein dem ABDC congruentes Quadrat.

Da die Quadrate CEHD und BDIG also auch unter einander congruent sind, so ist endlich HD = ID, also auch das Rechteck IDHF ein den drey andern congruentes Quadrat.

Das Quadrat AEFG ist also viermal so groß als das Quadrat ABDC.

Man ziehe ferner die Diagonalen CH, HI, IB, so sind dieselben als Diagonalen congruenter Quadrate ebenfalls unter einander und der Diagonale BC des Quadrats ABDC gleich. Das Viereck BCHI ist also gleichseitig.

Da die Diagonalen BC und BI der Quadrate ABDC und BDIG die rechten Winkel ABD und GBD einen jeden in zwey gleiche Theile theilen, so ist W. IBD = CBD = $\frac{1}{2}$ R., also W. IBD + CBD = 1 R.

Eben so läßt es sich von den drey übrigen Winkeln des Vierecks BCHI beweisen, daß sie rechte sind.

Das gleichseitige Viereck BCHI ist also ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse BC.

Durch die vier Diagonalen zerfallen die vier Quadrate in acht congruente Dreyecke (§. 55). Deren enthält das Quadrat BCHI vier, also halb so viel als das Quadrat AEFG.

Das Quadrat BCHI ist also halb so groß als das Quadrat AEFG.

Das Quadrat ABDC beträgt den vierten Theil des Quadrats AEFG.

Das Quadrat BCHI ist also zweymal so groß als das Quadrat ABDC.

B) Beweise des eigentlichen Pythagoräischen Lehrsatzes.

I) Beweise, welche bloß die Lehre von der Congruenz der Figuren voraussetzen.

a) Solche, da über den drey Seiten des recht-winkligen Dreyecks unmittelbar Quadrate beschrieben werden.

Art. 185. Lehrs. Das Quadrat der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreyecks ist so groß als die Quadrate der beyden Katheten zusammen genommen. [Art. 65].

Bew. (Fig. 185). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck, BCDE das Quadrat der Hypotenuse BC; ABFG und ACIH seyen die Quadrate der beyden Katheten AB und AC.

Man beschreibe auf ED ein Dreyeck EDK, so daß EK = AC und DK = AB ist, und ziehe FI, AK und GH.

Da ED = BC, EK = AC und KD = AB ist, so ist △ EKD ≌ CAB (§. 38).

Da ferner um A drey rechte Winkel sind, so ist auch W. GAH ein rechter (§. 12). Es ist also W. GAH = BAC; ferner ist AG = AB und AH = AC, also △ HAG ≌ CAB (§. 39).

Die drey Dreyecke EKD, CAB und HAG sind mithin unter einander gleich.

Vergleicht man nun das Viereck ABEK mit dem Viereck FBCI, so ist AB = FB, BE = BC und EK = CI. Ferner ist W. ABE = FBC (denn jeder ist = 1 R. + ABC); und W. BEK = BCI (denn jener ist = 1 R. + KED und dieser ist = 1 R. + ACB; die Winkel KED und ACB sind aber unter einander gleich, weil die Dreyecke KED und ABC congruent sind). In den beyden Vierecken ABEK und FBCI sind also drey Seiten und zwey eingeschlossene Winkel des einen dreyen Seiten und zweyen eingeschlossenen Winkeln des andern gleich. Beyde Vierecke sind mithin congruent (Art. 65).

Vergleicht man eben so das Viereck KDCA mit dem Viereck FGHI, so ist KD = FG (denn beyde sind gleich AB), GH = DC (denn da △ GAH ≌ ABC ist, so ist GH = BC und BC ist = CD) und HI = CA. Ferner ist W. KDC = FGH (denn beyde bestehen aus einem rechten W. EDC = FGA,

und der W. KDE ist = AGH, weil die Dreyecke EKD und HAG congruent sind); und W. DCA = GHI (denn jener ist = 1 R. + BCA und dieser ist = 1 R. + GHA; die W. BCA und GHA sind aber unter einander gleich, weil die Dreyecke BAC und GAH congruent sind). Es ist also, aus demselben Grunde wie oben, das Viereck KDCA ≌ FGHI (Art. 65).

Mithin ist

Viereck ABEK = FBCI

und

Viereck KDCA = FGHI

also auch

ABEK + KDCA = FBCI + FGHI

oder

Sechseck ABEKDC = Sechseck FBCIHG.

Folglich ist auch, da △ EDK = GAH ist,

Sechseck ABEKDC — △ ABC — △ EDK
= Sechseck FBCIHG — △ ABC — △ GAH

oder

Quadr. EBCD = Quadr. FBAG + Quadr. ACIH.

Anm. 1. J. W. Müller hat wohl das Verdienst, diesen einfachen, eleganten und durch seine Anschaulichkeit besonders empfehlenswerthen Beweis zuerst bekannt gemacht zu haben. Er ist der 15te in seiner Sammlung. In der Anm. S. 64 sagt er, daß er ihm mündlich mitgetheilt worden sey. Der 33ste Beweis in Hoffmanns 2ter Ausgabe stimmt mit demselben, wenigstens was die Hauptsache betrifft, überein. Als leichte Folgerung bemerkt Hoffmann, daß der rechte W. BAC durch die gerade Linie AK in zwey gleiche Theile getheilt werde.

Anm. 2. Es ist leicht zu übersehen, daß die gerade Linie FI durch den Scheitelpunkt A des rechten Winkels BAC gehen muß. Zieht man nämlich die beyden Diagonalen AF und AI, so liegen dieselben in gerader Linie. Denn es ist

W. BAF = $\frac{1}{2}$ R.
W. BAC = 1 R.

und

W. CAI = $\frac{1}{2}$ R.

also

W. BAF + BAC + CAI = 2 R.

Mithin FAI eine gerade Linie.

Anm. 3. Hoffmann construirt daher auch so, daß er die beyden geraden Linien AF und AI zieht, und von diesen beweist, daß sie in einer einzigen geraden Linie FI liegen. Nun ist

△ ABF = AGF
△ ABC = AGH

und

△ AIC = AIH

also

Viereck FBCI = Viereck FGHI.

Daß ferner Viereck ABEK = FBCI ist, wird, wie oben, gezeigt. Eben so läßt sich zeigen, daß Viereck ACDK = ICBF ist. U. s. w.

Art. 186. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 186). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck; BCDE sey das Quadrat der Hypotenuse; ABFG und ACIH seyen die Quadrate der beyden Katheten.

Man ziehe durch E die KL ∥ AC, sie durchschneide die Verlängerung von AH in K; und durch D die ML ∥ AH, sie durchschneide die KL in L und die Verlängerung von AC in M: so ist AKLM ein Parallelogramm, und zwar, da es bey A einen rechten Winkel hat, ein Rechteck.

Man ziehe ferner ID; so ist W. ICD = ACB (denn jeder macht mit BCI einen rechten), ferner CI = CA und CD = CB, also △ ICD ≌ ACB; mithin W. CID = CAB = 1 R. und ID = AB.

Da W. HIC + CID = 2 R., so ist HID eine gerade Linie.

Noch verlängere man die CI, bis sie die KL in N trifft; so sind HKNI, CMDI und IDLN drey Rechtecke.

Ferner ist W. EDL = CDI (denn jeder macht mit IDE einen rechten), W. DLE = DIC und DE = DC, also △ EDL ≅ IDC (§. 40) ≅ ABC, mithin DL = ID = AB.

Das Rechteck IDLN ist also ein Quadrat, und zwar dem Quadrat ABFG des einen Katheten AB gleich.

Ferner ist W. EBK = BCA (denn beyde sind = FBC; jener, weil beyde mit EBF einen rechten machen, dieser, als Wechselswinkel), W. K = A und BE = BC, also (§. 40) △ EBK ≅ BCA.

Da das Rechteck IDMC durch die Diagonale CD in zwey congruente Dreyecke zerlegt wird (§. 55), so ist △ CMD ≅ DIC ≅ ABC.

Die vier Dreyecke ABC, MCD, LED, KEB sind demnach unter einander gleich.

Da HI = IC und IN = ID ist, so ist auch Rechteck HINK ≅ CIDM.

Nun ist Rechteck IDMC = 2. △ MCD (§. 55).

Die 2 Rechtecke HINK und CIDM sind also zusammen so groß als die vier Dreyecke ABC, MCD, LED und KEB. Zieht man nun vom Rechteck AMLK (von dem man übrigens jetzt leicht zeigen kann, daß es ein Quadrat ist) diese vier Dreyecke ab, so bleibt das Quadrat BCDE der Hypotenuse übrig. Zieht man aber von demselben Rechteck AMLK jene beyden Rechtecke HINK und CIDM ab, so bleiben die Quadrate HICA und IDLN der beyden Katheten übrig.

Folglich, da Gleiches von Gleichem abgezogen Gleiches gibt, ist

BCDE = ACIH + IDLN

oder

BCDE = ACIH + ABFG.

(Hoffmann 9ter Beweis).

b) Beweise, in welchen bloß über den beyden Katheten unmittelbar Quadrate beschrieben

werden, von dem Viereck auf der Hypotenuse aber erst bewiesen werden muß, daß es ein Quadrat ist.

Art. 187. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 187). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck, ABFG das Quadrat des einen und ACIH das Quadrat des andern Katheten.

Man verlängere FB und IC bis sie sich in K, und FG und IH bis sie sich in L durchschneiden; nehme hierauf ID und LE beyde gleich AB, und ziehe BE, ED und DC.

Da bey A lauter rechte Winkel sind, so sind BAH und GAC gerade Linien; und da AB = AG und AH = AC ist, so ist AB + AH = AG + AC oder BH = GC.

Nun sind FK und LI beyde ‖ GC und FL und KI beyde ‖ BH, also ist FKIL ein Parallelogramm; und zwar, da auch GC = BH ist, ein gleichseitiges Parallelogramm; und wieder, da bey F und I rechte Winkel sind, also lauter rechte Winkel Statt finden, ein gleichseitiges Parallelogramm mit lauter rechten Winkeln oder ein Quadrat.

GAHL und BAKC sind ebenfalls Parallelogramme, und zwar Rechtecke.

Da FB und KC, so wie DI und LE, der AB gleich sind; so sind diese vier Linien unter einander gleich.

Zieht man diese vier Linien von den vier Seiten des Quadrats FKIL ab, so sind auch die vier Linien FE, KB, IC, DL unter einander gleich.

Die vier Winkel F, K, I, L sind, als rechte Winkel, ebenfalls unter einander gleich.

Also sind die vier Dreyecke EFB, BKC, CID, DLE unter einander congruent (§. 39).

Mithin ist BE = CB = DC = DE.

Das Viereck EBCD ist also gleichseitig, also auch ein Parallelogramm (§. 60).

Da die beyden Dreyecke FBE und KCB congruent sind, so ist W. FBE = KCB. Da in dem △ KCB bey K ein

rechter Winkel ist, so ist auch noch KCB + KBC = 1 R.; daher ist auch FBE + KBC = 1 R. Nun ist aber auch FBE + KBC + EBC = 2 R (§. 11); folglich (Gleiches von Gleichem abgezogen) bleibt noch EBC = 1 R. Da EBCD ein Parallelogramm ist, so sind die übrigen Winkel desselben ebenfalls rechte Winkel (§. 18 und 57).

Das gleichseitige Parallelogramm EBCD ist also ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse BC.

Da GA = AB, AH = AC und bey A gleiche Verticalwinkel sind, so ist

Rechteck GAHL = BACK.

Ferner ist (§. 55)

Rechteck BACK = 2. △ BKC

also

GAHL + BACK = 4. △ BKC

oder

GAHL + BACK = BKC + CID
+ DLE + EFB.

Zieht man nun vom Quadrat FKIL die beyden Rechtecke GAHL + BACK ab, so bleibt ABFG + ACIH. Zieht man hingegen von demselben Quadrate FKIL die vier Dreyecke BKC + CID + DLE + EFB ab, so bleibt EBCD.

Folglich ist (Ax.)

EBCD = ABFG + ACIH.

(Th. Simpson fünfte Ausg. p. 33).

Anm. 1. Dieser sehr anschauliche Beweis ist den Lehrern der Mathematik durch Klügel's mathematisches Wörterbuch sehr bekannt geworden. Die Construction der (übrigens unveränderten) Figur läßt sich auf mancherley Weise abändern. Die Construction, welche Klügel gibt, möchte unter allen die einfachste seyn (auch ist sie, nebenbey gesagt, beym Unterricht am leichtesten auf die Tafel zu zeichnen); nur hat sie das weniger Empfehlende, daß sie nicht mit der Verzeichnung des rechtwinkligen Dreyecks anfängt. Es wird nämlich zuerst ein beliebiges Quadrat FKIL construirt; auf dessen Seiten werden

die vier unter sich gleichen Stücke FB, KC, ID, LE abgeschnitten; dann werden die geraden Linien BC, CD, DE und EB gezogen. Endlich zieht man noch die CG der KF oder IL und die BH der FL oder KI parallel. Die CG und BH durchschneiden sich rechtwinklig in A, und bilden so das rechtwinklige Dreyeck BAC. U. s. w.

Anm. 2. Obiger Beweis ist nicht nur sehr anschaulich, sondern kann auch sehr einfach gemacht werden. Der Theil des Beweises, in welchem dargethan wird, daß BCDE ein Quadrat ist, läßt sich nämlich sehr gut von demselben trennen, und vorher als ein besonderer Lehrsatz behandeln, wie oben Art. 75 geschehen ist. Dieß thut auch Th. Simpson, indem er den Lehrsatz Art. 75 am Ende seines ersten, und den Pythagoräischen Lehrsatz erst in seinem zweyten Buche beweist.

Anm. 3. Klügel fand diesen Beweis in einem Englischen Lehrbuche der Geometrie von Henry Boad, London 1733. Daher nennt Hoffmann die acht Beweise (vom 9ten—16ten), die er auf die verschiedene äußere oder innere Lage der drey Quadrate gegen das Dreyeck gründet (s. oben S. 374), und von welchen ich Art. 186 den 9ten aufgenommen habe, Beweise nach Henry Boad. Ob dadurch dem Englischen Verfasser eines wenig bekannten Lehrbuchs nicht zu viel Ehre erwiesen worden ist? — Müller, bey welchem obiger Beweis der erste ist, sagt in der Anm. dazu, S. 26, diese Beweisart finde sich zuerst in Winkler's instit. math. phys. geom. §. 363, woraus sie Stöber in seine Dissertation aufgenommen hat; ferner in der von Mayer und Langsdorf besorgten Ausgabe von Wolf's Auszug aus den mathematischen Anfangsgründen, S. 175. — Beweise, die bloß auf der Congruenz der Figuren beruhen, kommen schon in weit älteren Schriften, z. B. in des Coetsius Ausgabe der 6 ersten Bücher des Euklides 1705; ferner (nach Müller S. 45 und 47) in Franc. a Schooten exercitationum math. libris qninque, 1657 und in P. Gregorii a St. Vincentio opere geometrico, 1647 vor (s. unten Art. 188, 189 und 190). Von

diesen aber ist der Uebergang auf die specielle Construction unseres obigen Beweises nicht schwer. Zu den Beweisen, welche weiter nichts als die Congruenz der Figuren voraussetzen, gehören auch die, welche man in Ozanam recreations mathematiques et physiques findet (s. unten Art. 188 Anm. 1 und Art. 190 Anm. 1).

Anm. 4. In Langsdorf's Darstellung wird (s. Müller S. 26) in dem Quadrat FKIL nur das Quadrat BCDE construirt, und als Quadrat erwiesen (wie in Art. 75), und hierauf die Buchstabenrechnung (mit Hülfe der Sätze von der Ausmessung der Figuren) angewandt. Es sey nämlich (Fig. 187) AC = a, AB = b, so ist FK = a + b. Ferner sey die Fläche des Quadrats FKIL = f, des Quadrats BCDE = g, und des △ ABC oder BKC = h, so ist

$$f = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Es ist aber auch

$$f = g + 4h$$

also ist

$$g + 4h = a^2 + 2ab + b^2.$$

Nun ist $h = \frac{ab}{2}$, folglich $4h = 2ab$, daher

$$g + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$$

folglich das Quadrat der Hypotenuse

$$g = a^2 + b^2.$$

Anm. 5. Als Beyspiel einer abgeänderten Construction bey unveränderter Figur (vgl. oben Anm. 1), führe ich noch folgende an, die, was die Verfertigung des Quadrats der Hypotenuse betrifft, mit den Constructionen der Art. 196, 197 und 198 übereinstimmt:

ABC sey das rechtwinklige Dreyeck, ABFG das Quadrat des einen, und ACIH das Quadrat des andern Katheten. Man errichte in B und C auf BC die Perpendikel BE und CD, welche die FG und IH oder deren Verlängerungen in E und D durchschneiden, und ziehe DE. Nun wird bewiesen, daß das Viereck BCDE ein Quadrat, und zwar das Quadrat der

Hypotenuse ist. Man verlängert ferner die FB und IC bis sie sich in K und die FG und IH bis sie sich in L durchschneiden. U. s. w.

Art. 188. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 188. a.). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck, ACIH das Quadrat des einen Katheten.

Man nehme auf IH, die man, wenn es nöthig ist, verlängere, ID = dem Katheten AB, und ziehe CD.

Ferner mache man HP = AB, und beschreibe darüber das Quadrat HPEQ, so ist dieses das Quadrat des andern Katheten.

Endlich ziehe man ED und EB.

Es ist nun W. BAC = DIC (als rechte Winkel), AB = ID (nach der Construction) und AC = CI, als Seiten desselben Quadrats; daher △ BAC ≅ IDC (§. 39); mithin CD = CB; und W. BCA = DCI, also auch BCA + ACD = DCI + ACD oder BCD = ACI = 1 R.

Da W. QHP + PHI = 2 R., so ist QHI eine gerade Linie.

Nun ist DI = QH, also auch QI — DI = QI — QH oder QD = HI = AC; ferner QE = HP = AB und W. EQD = BAC = 1 R., also △ EQD ≅ ABC; daher ED = BC.

Eben so ist HB — HP = HB — AB, oder BP = AH = AC, ferner EP = AB und W. EPB = BAC = 1 R., also △ EPB ≅ BAC; daher EB = BC.

Das Viereck EBCD ist also gleichseitig, mithin ein Parallelogramm, und, da es bey C einen rechten Winkel hat, ein Quadrat; und zwar das Quadrat der Hypotenuse.

Da △ ABC = DCI = QED = PEB ist, so ist

Fünfeck ACDEP + △ ABC + △ EPB
= Fünfeck ACDEP + △ DCI + △ EQD

oder

Quadrat EBCD = Sechseck ACIQEP.

Folglich ist auch

EBCD = ACIH + HQEP.

(Coetsius p. 158; Hoffmann's 17ter Bew.; Müller's 2ter Bew.).

Anm. 1. Dieser Beweis empfiehlt sich vor allen durch seine Anschaulichkeit, daher er auch in mehrere Lehrbücher der Geometrie aufgenommen worden ist. Unter andern findet er sich (nach Müller S. 28) schon in Clairaut's Anfangsgründen der Geometrie, übers. von Bierling, 1753. Auch findet man ihn in Guyot's neuen physic. und mathem. Belustigungen. Aus dem Franz. 5ter Theil. Augsb. 1775; daselbst S. 174.

Besonders anschaulich nenne ich diesen Beweis, weil er die Gleichheit des Hypotenuse-Quadrats mit den Katheten-Quadraten dadurch darthut, daß er beyde aus denselben und aus congruenten Stücken zusammen setzt. Denn schneidet man vom Quadrat EBCD der Hypotenuse die beyden rechtwinkligen Dreyecke EPB und BAC ab, und setzt sie dagegen in EDQ und DCI an, so erhält man die Figur ACIQEP oder die Quadrate der beyden Katheten. Man kann hier also im Nothfalle mit der Scheere und mit Papier zu Hülfe kommen. Dieselbe Anschaulichkeit gewähren auch die Beweise, die sich, nur weniger kurz, nach Fig. 188 b. und 188 c. führen lassen. (Vgl. Ozanam S. 288).

Anm. 2. Man konnte den Schluß auch so abfassen:

Fünfeck BCIQE — △ DCI — △ EQD
= Fünfeck BCIQE — △ ABC — △ EPB

oder

Quadrat EBCD = Sechseck ACIQEP.

Anm. 3. Wenn man die Gleichheit von QD und HI aus QI — DI = QI — QH ableitet, so spart man entweder die doppelte Figur (die z. B. Müller hat), oder die Voraussetzung, daß AC der größere oder kleinere Kathete sey. Wenn nämlich AC der größere Kathete ist, also D zwischen I und H fällt, so ist auch QH + HD = DI + HD oder QD = HI.

Wäre aber AC der kleinere Kathete, so fiele D zwischen H und Q, und es wäre QH — HD = ID — HD oder QD = HI. In beyden Fällen aber ist QI — DI = QI — QH.

Art. 189. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 189). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck. Man beschreibe auf den beyden Katheten AB und AC die Quadrate ABFG und ACIH, und verlängere deren Seiten FG und IH, bis sie sich in M durchschneiden.

Auf FM schneide man hierauf FE = AC und auf IM die ID = AB ab, und ziehe BE, ED und DC. Endlich ziehe man noch AM.

Da bey A lauter rechte Winkel sind, so sind BAH und GAC gerade Linien.

Da BF = BA, FE = AC und W. BFE = BAC ist, so ist △ BFE ≌ BAC; also BE = BC und W. FBE = ABC. Also auch W. ABC + EBA = FBE + EBA oder EBC = FBA = 1 R.

Da ferner CI = CA, ID = AB und W. CID = CAB ist, so ist △ CID ≌ CAB; also CD = BC und W. ICD = ACB. Also auch W. ACB + ACD = ICD + ACD, oder W. BCD = ACI = 1 R.

In dem Viereck EBCD sind demnach bey B und C rechte Winkel, also ist EB nicht nur = CD, sondern auch ∥ CD (§. 18); also ist EBCD ein Parallelogramm (§. 59), und insbesondere ein Rechteck. Da zugleich EB = BC ist, so ist das Rechteck EBCD ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse BC.

Es ist also auch ED = BC. Ferner ist, da FBHM und GCIM Parallelogramme, mithin FM und BH, so wie MI und GC, einander gleich sind, EM = FM — FE = FM — AC = BH — AH = AB; und MD = MI — DI = MI — AB = GC — AG = AC. Mithin ist auch △ EMD ≌ BAC.

Ferner ist MH = FB = AB, AH = AC und W. MHA = BAC, also △ MHA ≌ BAC.

GAHM ist ebenfalls ein Parallelogramm (§. 25) und wird durch die Diagonale AM in zwey congruente Dreyecke getheilt (§. 55). Mithin ist auch △ AGM ≌ MHA ≌ BAC.

Da nun die fünf Dreyecke BFE, DIC, EMD, MHA, AGM, ein jedes dem △ BAC congruent ist, so sind alle sechs Dreyecke unter einander congruent.

Folglich ist auch

Fünfeck BCIMF — △ BFE — △ DIC — △ EMD
= Fünfeck BCIMF — △ BAC — △ MHA — △ AGM

oder

BCDE = ABFG + ACIH.

(Müller's 8ter Bew., aus Franc. a Schooten exercit. mathem.)

Art. 190. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 190). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck. Man beschreibe auf den beyden Katheten AB und AC die Quadrate ABFG und ACIH, so sind, da bey A lauter rechte Winkel sind, BAH und GAC gerade Linien.

Die Seiten FG und IH der beyden Katheten-Quadrate verlängere man, bis sie sich in M durchschneiden.

Auf FM schneide man hierauf FE = AC und auf IM die ID = AB ab, und ziehe BE, ED und DC.

Da BF = BA, FE = AC und W. BFE = BAC ist, so ist △ BFE ≌ BAC; also BE = BC und W. FBE = ABC. Also auch W. ABC + EBA = FBE + EBA oder W. EBC = FBA = 1 R.

Da ferner CI = CA, ID = AB und W. CID = CAB ist, so ist △ CID ≌ CAB; also CD = BC und W. ICD = ACB. Also auch W. ACB + ACD = ICD + ACD, oder W. BCD = ACI = 1 R.

In dem Viereck EBCD sind demnach bey B und C rechte Winkel, also ist EB ∥ CD (§. 18). Da auch EB = CD ist, so ist mithin EBCD ein Parallelogramm (§. 59), und zwar ein Rechteck. Da in diesem Rechteck die an einander

liegenden Seiten EB und BC einander gleich sind, so ist es ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse.

Es ist also auch ED = BC. Ferner ist, da FBHM und GCIM Parallelogramme, mithin FM und BH, so wie MI und GC einander gleich sind, EM = FM — FE = FM — AC = BH — AH = AB; und MD = MI — DI = MI — AB = GC — AG = AC. Mithin ist auch △ EMD ≅ BAC (§. 39), also MD = FE und W. QDH = REG.

Da auch MH = FB = FG ist, so ist daher MD — MH = FE — FG oder DH = EG. Nun ist auch W. DHQ = EGR (denn jeder ist ein rechter), also △ QDH ≅ REG.

Also ist auch QD = ER. Da nun auch ED = BC = EB ist, so ist ED — QD = EB — ER oder EQ = BR. Ferner ist EB = BC und W. QEB = RBC (denn jeder ist ein rechter), also △ QEB ≅ RBC.

Zieht man von beyden congruenten Dreyecken das △ ABR ab, so bleibt das Trapez AREQ = △ BAC; also auch Trapez AREQ = △ EFB = △ REG + Trapez GRBF = △ QDH + Trapez GRBF.

Nun ist

Quadrat EBCD = ACDQ + ABC + ABR + AREQ.

Setzt man CDI Statt ABC, und QDH + GRBF Statt AREQ; so ist

EBCD = ACDQ + CDI + ABR + QDH + GRBF

oder

EBCD = ACDQ + CDI + QDH + ABR + GRBF = ACIH + ABFG.

(Müller's 9ter Bew., aus Gregorii a St. Vincentio opere geom.)

Anm. 1. Ozanam, l. c. S. 287, hat eine ganz ähnliche Construction, welche sich von der obigen nur darin unterscheidet, daß die Verlängerungen EM und HM der Linien FE und IH unterlassen wurden, und darin, daß aus E ein Perpendikel Ex

(das in der Figur 190 nicht gezeichnet ist) auf BH gefällt ist, so daß das Quadrat der Hypotenuse aus den Stücken ACDQ, ABC, EBx und EQx zusammen gesetzt wird. U. s. w. Der vollständige Beweis nach dieser Construction des Ozanam bleibt dem Leser überlassen.

Anm. 2. In der Construction des obigen Beweises hätte ebenfalls das Verlängern von FE oder FG und von IH oder ID, bis sie sich in M durchschneiden, unterbleiben können. Die Figur hätte dadurch an Anschaulichkeit gewonnen, was der Beweis selbst an Einfachheit verloren hätte. Denn die Congruenz des △ EMD mit BAC bedurfte man nur, um daraus die Gleichheit von Seiten und Winkeln abzuleiten, die sich hier auch ohne das △ EMD ergibt. Ist nämlich AC > AB, so fällt D zwischen H und I und E auf die Verlängerung von FG über G hinaus. Dann ist HD = HI — DI = EF — FG = EG; ist aber AC < AB, so fällt D auf die Verlängerung von IH über H hinaus, und E fällt zwischen F und G. Dann ist HD = DI — HI = FG — EF = EG. Ferner macht der W. QDH mit CDI, also auch mit FBE einen rechten, ist also dem W. REG gleich; und bey H und G sind rechte Winkel. Mithin ist △ QHD ≅ RGE. U s. w.

II) Beweise, welche, außer der Lehre von der Congruenz, auch noch die Lehre von der Gleichheit der Figuren voraussetzen.

a) Solche, da über den drey Seiten des rechtwinkligen Dreyecks unmittelbar Quadrate beschrieben werden.

Art. 191. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 191). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck, BCDE das Quadrat der Hypotenuse, ABFG und ACIH die Quadrate der beyden Katheten.

Man ziehe AO ‖ BE und CD. Sie durchschneide die BC in K; so entstehen die beyden Rechtecke BEOK und KODC.

Ferner mache man auf AO die AP = BE oder BC, und ziehe DP und EP.

Da AP ‡ BE und auch ‡ CD; so sind ABEP und APDC Parallelogramme.

Daher ist auch EP ll BA und PD ll AC.

Man verlängere eine von beyden, etwa EP, bis sie den nicht parallelen Katheten AC oder dessen Verlängerung in einem Punkte Q durchschneidet. (In der Figur, wo AC der größere Kathete ist, trifft die Verlängerung von EP denselben zwischen A und C).

Da EQ ll AB ist, so ist W. PQA ein rechter, also = BAC.

Ferner ist, da AP ll BE ist, der W. AKB = 1 R.; also ist auch

W. KAB + ABC = 1 R.

Nun ist aber auch

W. KAB + PAQ = R.,

also

W. KAB + ABC = KAB + PAQ

daher auch

W. PAQ = ABC.

Mithin ist das △ AQP mit dem Dreyeck BAC congruent (§. 40), also

AQ = AB = AG

und

PQ = AC = AH.

AQ ist nun die Höhe des Parallelogramms ABEP, wenn man AB als die Grundlinie desselben betrachtet. Das Parallelogramm ABEP hat demnach mit dem Quadrate ABFG die Grundlinie AB gemein, und beyde haben gleiche Höhen AQ und AG.

Mithin ist Parallelogr. ABEP = Quadrat ABFG (§. 65).

Das Rechteck BEOK hat eben so mit dem Parallelogramm ABEP die Grundlinie EB gemein, und liegt mit demselben zwischen denselben Parallellinien EB und AO. Also ist auch

Parallelogr. ABEP = Rechteck BEOK (§. 65).

Folglich ist

Rechteck BEOK = Quadrat ABFG.

Ganz auf dieselbe Art läßt sich beweisen, daß das

Rechteck KODC = Quadrat ACIH

ist.

Folglich ist

BEOK + KODC = ABFG + ACIH

oder

BCDE = ABFG + ACIH.

(Coetsius p. 153).

Anm. 1. Dieser Beweis hat das Auszeichnende, daß die beyden Rechtecke, in welche wie beym Beweise des Euklides das Quadrat der Hypotenuse zerlegt wird, dadurch als ihren zugehörigen Quadraten gleich groß dargethan werden, daß man dritte Parallelogramme (und nicht congruente Dreyecke, wie beym Euklidischen Beweis) zu Hülfe nimmt, welchen sowohl die Rechtecke als die Quadrate der Katheten gleich sind. Im Uebrigen ist der Beweis dem Euklidischen ganz analog. — In Hinsicht auf Anschaulichkeit ist er dem Euklidischen vorzuziehen.

Anm. 2. Man findet diesen Beweis mit kleinen Modificationen

a) in Kries l. c. S. 373. Dort wird IC über C hinaus verlängert, bis sie die DP durchschneidet, und die AB wird über B hinaus verlängert, bis sie die Verlängerung von DP trifft: Statt, daß bey uns die EP verlängert wird. Ich überlasse es dem Leser, nach dieser anders modificirten Construction den Beweis selbst zu führen.

b) in Hoffmann ist er der 18te Beweis, aus Vieth's Anfangsgründen der Mathematik, I. Th. Leipz. 1805. Hoffmann construirt so: er zieht AK lothrecht auf BC und verlängert sie nach O. Nun zieht er DP ll AC und verlängert IC über C hinaus bis zum Durchschnitt mit DP. Ferner zieht er EP, verlängert sie über P hinaus, bis sie von einer durch B mit AC parallelen getroffen wird. Auch nach dieser Construction den Beweis selbst zu führen, bleibt dem Leser überlassen.

c) In Müller kommt ein verwandter Beweis aus Stöber vor, nämlich in Müller der 13te. Der Unterschied

von dem obigen ist bloß darin, daß Statt eines Hülfsparallelogramms deren zwey unter einander congruente construirt werden. Ich theile diesen Beweis im nachfolgenden Artikel mit.

Art. 192. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 192). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck, BCDE das Quadrat der Hypotenuse, ABFG und ACIH die Quadrate der beyden Katheten.

Man ziehe AO der BE oder CD parallel. Sie durchschneide die BC in K und die ED in O; so zerfällt dadurch das Quadrat BCDE in die beyden Rechtecke BEOK und KODC.

Auf AO nehme man AP = BE = CD, und ziehe EP und PD, so sind, da AP ⧺ BE und auch ⧺ CD ist, ABEP und ACDP Parallelogramme (§. 59), welche den Rechtecken BEOK und KODC gleich sind, da sie mit denselben auf einerley Grundlinien BE und CD und zwischen denselben Parallellinien BE, AO und CD, AO liegen (§. 65).

Ferner ziehe man FM und IN der BC parallel. Jene durchschneide die AC in M, diese die AH in N; so sind, da zugleich FB ll MC und BN ll CI ist, auch FBCM und BNIC Parallelogramme (§. 25), welche den Quadraten FBAG und CIHA gleich sind, da sie mit denselben auf einerley Grundlinien BF und CI und zwischen denselben Parallellinien FB, GC und CI, BH liegen. GAC und BAH sind nämlich gerade Linien, da sowohl BAG + BAC, als auch BAC + CAH = 2 R. ist.

Nun ist EB = BC, BA = BF und W. EBA = CBF (denn jeder besteht aus 1 R. und dem W. CBA), also Parallelogramm EBAP ≌ CBFM (§. 58).

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß das Parallelogramm DCAP ≌ BCIN ist.

Es war nun aber

Rechteck BEOK = EBAP

und

Quadrat ABFG = CBFM

also ist

Rechteck BEOK = Quadrat ABFG.

Eben so ist

Rechteck KODC = Quadrat ACIH.

Folglich ist

BEOK + KODC = ABFG + ACIH

oder

BCDE = ABFG + ACIH.

(J. W. Müller S. 58).

Anm. 1. Man übersieht leicht, daß verschiedene Constructionen möglich sind, um die Parallelogramme EBAP und DCAP zu erhalten. Obige scheint mir unter denselben die einfachste, daher ich sie auch Statt der Müllerschen gesetzt habe.

Anm. 2. Dieser Beweis ist dem Euklidischen noch näher verwandt, als der des vorigen Artikels. Es werden darin nur congruente Hülfsparallelogramme Statt congruenter Hülfsdreyecke gebraucht. Die Congruenz zweyer zusammen gehörigen Hülfsparallelogramme wird ganz auf dieselbe Art bewiesen, wie die Congruenz der Euklidischen Hülfsdreyecke.

Art. 193. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. ABC (Fig. 193) sey das rechtwinklige Dreyeck; BCDE sey das Quadrat der Hypotenuse, ABFG und ACIH seyen die Quadrate der beyden Katheten.

Man ziehe durch A die MO ll BE. Sie durchschneide die ED in O, die BC in K und die Verlängerung von FG in M. Dann verlängere man noch EB bis sie die FM in L trifft. So entstehen die beyden Rechtecke BEOK und KODC, und, da auch AB ll LM ist, das Parallelogramm ABLM.

Nun ist BF = BA, W. BFL = BAC (denn jeder ist 1 R.) und W. FBL = ABC (denn jeder macht mit LBA einen rechten aus, indem nämlich W. ABF ein rechter ist, als W. im Quadrat, und W. LBC ein rechter ist, als Nebenwin-

kel des Winkels CBE im Quadrat). Also ist $\triangle$ LFB = CAB; mithin BL = BC = BE.

Das Rechteck BEOK hat also mit dem Parallelogramm BLMA gleiche Grundlinie, BE = BL, und, da es mit demselben zwischen einerley Parallellinien EL und OM liegt, auch gleiche Höhe. Folglich ist (§. 65)

Rechteck BEOK = Parallelogr. BLMA.

Ferner liegt das Quadrat ABFG mit dem Parallelogramm ABLM auf derselben Grundlinie AB und zwischen denselben Parallellinien AB und FM. Folglich ist auch (§. 65)

Quadrat ABFG = Parallelogr. BLMA.

Daher ist

Rechteck BEOK = Quadrat ABFG.

Eben so wird bewiesen, daß

Rechteck KODC = Quadrat ACIH

ist. Folglich ist

BEOK + KODC = ABFG + ACIH

oder

BCDE = ABFG + ACIH.

(Th. Simpson S. 33. — Hoffmann 20ster Bew.).

Anm. Dieser Beweis hat, in Hinsicht auf die geometrischen Sätze, welche zu demselben gebraucht werden, am meisten Uebereinstimmendes mit dem Beweis Art. 191. Die Construction des Th. Simpson, die ich hier aufgenommen habe (so wie auch die Hoffmann'sche), ist besser und einfacher, als die des J. W. Müller (14ter Bew. S. 60 aus Stöber). Müller verlängert nämlich die beyden Seiten FG und IH, bis sie sich in M durchschneiden, und zieht dann MA, deren Verlängerung die BC in K und die ED in O durchschneidet. Nun hat er erst noch zu beweisen, daß MO ll EB ist.

Daß sich die durch A mit BE parallel gezogene Linie MO mit den beyden Verlängerungen von FG und IH in einem Punkte M durchschneidet, ist zwar ein an sich interessanter Satz, der wohl gelegentlich als leichte Folgerung hier bemerkt werden darf. Aber zu dem Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes

gehört er nicht, und ist daher, als Ueberfluß in dem Beweise, verwerflich.

Art. 194. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 194). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck; BCDE sey das Quadrat der Hypotenuse, ABFG und ACIH seyen die Quadrate der beyden Katheten.

Man ziehe durch A die AO parallel mit BE oder CD. Sie durchschneide die BC in K und die ED in O, so zerfällt dadurch das Quadrat BCDE in die beyden Rechtecke BEOK und KODC.

Man ziehe ID, so ist

W. BCD = ACI = 1 R.

also

W. BCD — BCI = ACI — BCI

oder

W. ICD = ACB.

Ferner ist IC = AC und CD = CB, als Seiten derselben Quadrate, mithin △ ICD ≌ ACB, also auch

W. DIC = BAC = 1 R.

Mithin ist W. DIC + CIH = 2 R., folglich DIH eine gerade Linie.

Man ziehe AD, so ist

Rechteck KODC = 2. △ ACD,

da beyde Figuren die Grundlinie CD gemein haben, und zwischen denselben Parallellinien CD und AO liegen, also auch gleiche Höhe haben (§. 61).

Auch ist

Quadrat ACIH = 2. △ ACD,

da beyde Figuren die Grundlinie AC gemein haben, und zwischen denselben Parallellinien AC und HD liegen, also auch gleiche Höhe haben (§. 61).

Mithin ist

Rechteck KODC = Quadrat ACIH.

Auf dieselbe Art, wie oben, wird bewiesen, daß, wenn man FE

zieht, GFE eine gerade Linie ist, und dann weiter geschlossen, daß

Rechteck BEOK = Quadrat ABFG

ist. Folglich ist

KODC + BEOK = ACIH + ABFG

oder

BCDE = ACIH + ABFG.

(Hoffmann 4ter Bew.).

Anm. 1. Dieser Beweis unterscheidet sich von dem Euklidischen vorerst dadurch, daß die beyden Kathetenquadrate eine andere Lage wie bey diesem haben. Sie liegen, wie wir uns oben S. 374 ausgedrückt haben, nicht nach außen, sondern nach innen des Dreyecks ABC.

Dadurch wird der Beweis, daß die der gemeinschaftlichen Grundlinie (hier AC) von Quadrat und Dreyeck gegen über liegende Linie (hier HID) eine gerade Linie sey, etwas umständlicher, als beym Euklidischen Beweis. Dagegen braucht man hier nur ein Hülfs-Dreyeck, Statt daß Euklid zwey congruente Hülfs-Dreyecke braucht, deren Congruenz zu beweisen ungefähr den nämlichen Aufwand erfordert, den hier die Geradlinigkeit von HID verlangt.

Anm. 2. Hoffmann begeht hier denselben Fehler gegen die Concision, den Müller im Beweise des vorigen Artikels beging, indem er in dem Beweise selbst darthut, daß sich die drey geraden Linien HD, GE und AO in einem Punkte x durchschneiden. Dieser Satz ist wahr und interessant, aber für den Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes ganz überflüssig.

Anm. 3. Sehr gut bemerkt Hoffmann, daß man (nach der Weise des Art. 291), Statt des Hülfs-Dreyecks ACD, das Hülfs-Parallelogramm ACDx gebrauchen kann. Es soll dem Leser überlassen bleiben, auf diese Art den Beweis zu führen.

Anm. 4. Hoffmann kommt auf den obigen Beweis, dadurch, daß er, nach dem was oben S. 374 berichtet worden, die Lagen der drey Quadrate über den Seiten des rechtwinkligen

Dreyecks bald nach außen, bald nach innen verändert. Unter den auf diese Art entstehenden acht Beweisen haben mehre nur dadurch Interesse, daß sie eben zur Vollständigkeit des Systems dieser acht Beweise gehören; mehre derselben haben das Mangelhafte, was ich oben Mangel an Gleichförmigkeit nannte. Ich hätte es auch Mangel an Symmetrie nennen können, ein Mangel, der, so wenig auch ein geometrischer Beweis Anspruch auf Schönheit machen kann, dennoch unser Gefühl beleidigt. Ein Beyspiel zu dem Gesagten liefere uns der zweyte Hoffmann'sche Beweis, wo das Quadrat der Hypotenuse und das Quadrat des kleineren Katheten nach außen, und nur das Quadrat des größeren Katheten nach innen liegt. Hierzu kann uns die Figur 194 dienen, wenn wir nur das Quadrat AGFB über AB nach außen zeichnen. Jetzt haben das Quadrat AGFB und das eine Rechteck BEOK dieselbe Lage gegen einander wie beym Euklidischen Beweis. Ihre Gleichheit wird daher dargethan, indem man zeigt, daß beyde zweymal so groß als zwey congruente Dreyecke sind. Dagegen haben das Quadrat ACIH und das andere Rechteck KODC die Lage gegen einander wie beym Beweise des Art. 194. Ihre Gleichheit wird daher jetzt (anders als bey dem Quadrat AGFB und Rechteck BEOK) dadurch dargethan, daß man zeigt, daß beyde zweymal so groß als dasselbe Dreyeck sind. Ein Fehler gegen die Gründlichkeit des Beweises ist dieses freylich nicht, und wenn wir keinen anderen Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes hätten oder finden könnten, so müßten wir ihn auch für vollkommen halten.

Art. 195. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 195). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck; AB, AC seyen die beyden Katheten, BC die Hypotenuse.

Man construire über dem Katheten AB das gleichschenklige rechtwinklige △ ABF, worin ABF der rechte Winkel und BF $=$ AB ist; ferner über dem Katheten AC das gleichschenklige rechtwinklige △ ACI, worin ACI der rechte Winkel und CI $=$ CA ist; und über der Hypotenuse BC das gleichschenk-

lige rechtwinklige Dreyeck EBC, worin EBC der rechte Winkel und BE = BC ist.

Man ziehe FC und AE, fälle aus E das Perpendikel EM auf AC oder deren Verlängerung, und verlängere FB über B hinaus, bis sie die EM in N trifft.

Da die in B und C rechtwinkligen Dreyecke FBA und ACI gleichschenklig sind, so ist ein jeder ihrer Winkel an der Grundlinie = $\frac{1}{2}$ R., also FAB + BAC + CAI = 2 R. Mithin ist FAI eine gerade Linie.

Ferner ist W. EBN = ABC (denn jeder macht mit NBC einen rechten), W. ENB = CAB (denn jeder ist ein rechter) und BE = BC; also ist △ EBN ≅ CBA (§. 40); daher EN = AC und BN = AB.

Betrachtet man CI als die Grundlinie des △ CIF, so ist FB + AC oder AB + AC seine Höhe.

Betrachtet man AC als die Grundlinie des △ ACE, so ist EM oder EN + NM, oder (da BNMA ein Parallelogramm, also NM = AB ist) AC + AB seine Höhe.

Da nun CI = AC ist, so haben die beyden Dreyecke ICF und ACE gleiche Grundlinien und gleiche Höhen, sind also einander gleich (§. 69).

Ferner ist W. FBC = ABE (denn jeder besteht aus 1 R. und dem W. ABC), FB = AB und BC = BE, also △ FBC ≅ ABE.

Mithin ist auch

△ ICF + FBC = △ ACE + ABE

oder

Viereck CIBF = Viereck ABEC.

Nimmt man von beyden gleichen Vierecken das △ ABC weg, so bleibt

△ ABF + △ ACI = △ BCE.

Nun ist aber jedes dieser Dreyecke die Hälfte des Quadrats der Seite, auf welcher es steht. Folglich sind auch die Quadrate über den beyden Katheten zusammen genommen dem Quadrate über der Hypotenuse gleich.

Anm. Obiger Beweis ist bey Hoffmann in der zweyten Ausgabe der 34ste. — Er beruht auf der Congruenz und Gleichheit der Figuren. Die Hälften der Quadrate oder die gleichschenkligen rechtwinkligen Dreyecke werden alle über den drey Seiten des Dreyecks unmittelbar beschrieben; daher steht dieser Beweis hier in dieser Abtheilung.

Hoffmann bemerkt in einem Zusatz, daß sich die beyden Linien FC und AE rechtwinklig durchschneiden. Der Durchschnittspunkt sey x; so ist W. CFB = EAB, weil die Dreyecke CFB und EAB congruent sind. W. BFC ist aber = xCA, weil FB und AC parallel sind, also ist W. EAB = xCA. Nun macht xAC mit EAB einen rechten; also macht xAC auch mit xCA einen rechten. Folglich ist im △ AxC der W. AxC ebenfalls ein rechter.

b) Beweise, in welchen bloß über den beyden Katheten unmittelbar Quadrate beschrieben werden, von dem Viereck auf der Hypotenuse aber erst bewiesen werden muß, daß es ein Quadrat ist.

Art. 196. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 196). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck; ABFG und ACIH seyen die Quadrate der beyden Katheten.

Man errichte in B und C auf BC die Perpendikel BE und CD, bis sie die FG und IH oder deren Verlängerungen in E und D durchschneiden, und ziehe ED.

Es ist W. FBA = EBC (denn jeder ist = 1 R.), also W. FBA — EBA = EBC — EBA oder W. FBE = ABC. Ferner ist W. BFE = BAC, da jeder ein rechter ist, und BF = BA, als Seiten desselben Quadrats, mithin △ BFE ≌ BAC; daher BE = BC. Eben so wird bewiesen, daß CD = BC ist. Das Viereck EBCD ist demnach ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse.

Man ziehe ferner durch A die OK der EB oder DC parallel. Sie durchschneide die ED in O und die BC in K.

Dadurch zerfällt das Quadrat BCDE in die beyden Rechtecke BEOK und KODC.

Man ziehe AE, so ist (§. 69)

Rechteck BEOK = 2. △ BAE,

da beyde Figuren die Grundlinie BE mit einander gemein haben, und zwischen denselben Parallellinien BE und OK liegen.

Auch ist (§. 69)

Quadrat ABFG = 2. △ BAE,

da beyde die Grundlinie AB gemeinschaftlich haben, und zwischen denselben Parallellinien AB und FE liegen.

Daher ist

Rechteck BEOK = Quadrat ABFG.

Eben so wird, indem man die Linie AD zieht, bewiesen, daß

Rechteck KODC = Quadrat ACIH

ist. Folglich ist

BEOK + KODC = ABFG + ACIH

oder

BCDE = ABFG + ACIH.

(Clavius S. 76; Hoffmann 5ter Bew. S. 13; Müller 5ter Bew. S. 35).]

Anm. 1. Clavius ist wohl der erste, der diesen netten Beweis bekannt gemacht hat. Er ist aus ihm in viele andere Schriften übergegangen.

Anm. 2. In obigem Beweise wird aus der Gleichheit der drey Seiten EB, BC, CD, und daraus, daß die eingeschlossenen Winkel rechte sind, geschlossen, daß das Viereck ein Quadrat ist. Denn da W. EBC + BCD = 2 R. ist, so ist EB nicht nur = CD, sondern es ist auch EB ll CD, also das Viereck BCDE ein Parallelogramm. Da in diesem Parallelogramm die an einander liegenden Seiten EB und BC einander gleich sind, so ist es gleichseitig; und da in jedem Parallelogramm die gegen über liegenden Winkel einander gleich sind, so hat es auch lauter rechte Winkel. Folglich ist das Parallelogramm BCDE ein Quadrat.

Art. 197. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 197). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck, ABFG das Quadrat des einen und ACIH das Quadrat des andern Katheten.

Man errichte in B und C auf BC die Perpendikel BE und CD, welche die FG und IH oder deren Verlängerungen in E und D durchschneiden, und ziehe ED.

Auf dieselbe Art wie Art. 196 wird nun bewiesen, daß das Viereck EBCD ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse ist.

Man ziehe ferner durch A die OK der EB oder CD parallel. Sie durchschneide die BC in K und die ED in O; so zerfällt dadurch das Quadrat BCDE in die beyden Rechtecke BEOK und KODC.

Man verlängere KO bis sie die Verlängerung von IH in M trifft, so ist ACDM ein Parallelogramm (§. 25).

Nun ist (§. 65)

Rechteck KODC = Parallelogr. ACDM.

Denn beyde stehen auf derselben Grundlinie DC und zwischen denselben Parallellinien DC und MK.

Auch ist (§. 65)

Quadrat ACIH = Parallelogr. ACDM.

Denn beyde stehen auf derselben Grundlinie AC und zwischen denselben Parallellinien AC und MI.

Mithin ist

Rechteck KODC = Quadrat ACIH.

Verlängert man eben so die KO bis sie die Verlängerung von FG in einem Punkte durchschneidet, so wird auf dieselbe Art bewiesen, daß

Rechteck BEOK = Quadrat ABFG

ist. Folglich ist

KODC + BEOK = ACIH + ABFG

oder

BCDE = ACIH + ABFG.

(Clavius p. 75; Hoffmann's 19ter Bew. S. 34; Müller's 7ter Bew. S. 40).

Anm. 1. Auch von diesem Beweis, der ebenfalls in viele andere Schriften übergegangen ist, ist ohne Zweifel Clavius der erste Erfinder. Er verhält sich zu dem vorigen Beweise, wie sich der Beweis des Art. 191 zu dem Euklidischen oder vielmehr zu dem Beweise des Art. 194 verhält. Statt der Hülfsdreyecke, die halb so groß als das eine Rechteck und das zugehörige Quadrat sind, werden Hülfs-Parallelogramme, denen Rechteck und Quadrat gleich sind, construirt.

Anm. 2. Construirt man so, daß man die beyden Kathetenquadrate ABFG und ACIH beschreibt, die Seiten FG und IH derselben verlängert, bis sie sich in M durchschneiden, dann MA, und derselben parallel die BE und CD zieht, bis sie die FG und IH oder deren Verlängerungen in E und D durchschneiden, und endlich die Punkte E und D durch eine gerade Linie verbindet; so läßt sich ebenfalls beweisen, daß BEDC das Quadrat der Hypotenuse ist. Bey dieser Construction wird der Pythagoräische Lehrsatz zu einem besonderen Fall eines sehr interessanten allgemeineren Satzes, der oben Art. 131 bewiesen worden ist. Vgl. Art. 134.

Anm. 3. Einen ähnlichen Beweis, wie oben, erhält man, wenn man sich in Fig. 188 die Linie AQ gezogen und dieselbe über A hinaus verlängert denkt, bis sie die CB in K durchschneidet. Der Durchschnittspunkt der AQ und ED heiße O. Dann ist nämlich

Rechteck EBKO = Parallelogr. EBAQ
= Quadrat PEQH

und

Rechteck KODC = Parallelogr. AQDC
= Quadrat ACIH.

U. s. w. Diesen Beweis findet man in Coetsius S. 157.

Anm. 4. Ganz den nämlichen Beweis wie in Anm. 3 erhält man auch, wenn man sich in Fig. 188 die IP gezogen, und über P hinaus nach EB verlängert denkt.

Art. 198. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 198). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck, ABFG das Quadrat des einen, und ACIH das Quadrat des andern Katheten.

Man errichte in B und C auf BC die Perpendikel BE und CD, welche die FG und IH oder deren Verlängerungen in E und D durchschneiden, und ziehe DE.

Auf dieselbe Art wie Art. 196 wird nun bewiesen, daß das Viereck BCDE ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse ist.

Da bey A lauter rechte Winkel sind, so sind BAH und GAC gerade Linien.

Man ziehe nun durch F die FN ll BC oder ED. Sie durchschneide die BE und CD in M und N, und die GC in R, so zerfällt das Quadrat BCDE in die beyden Rechtecke BCNM und NMED, und FBCR ist ein Parallelogramm.

Auch ziehe man durch I die IP ll BC oder ED. Sie durchschneide die BE und CD in P und Q, und die BH in S, so zerfällt das Quadrat BCDE in die beyden Rechtecke BCQP und PQDE, und BCIS ist ein Parallelogramm.

Da sowohl △ BFE, als auch DIC mit ABC congruent ist, so sind BFE und DIC auch unter einander congruent; also ist W. FEM = ICQ, und EF = CI. Ueberdem sind, da FN ll BC und IP ll DE ist, die W. FME und IQC rechte Winkel, also einander gleich. Mithin (§. 40) ist △ EMF ≌ CQI, also EM = CQ.

Da in den beyden Rechtecken EMND und CQPB überdem ED = CB ist, so ist Rechteck EMND ≌ CQPB.

Nun ist (§ 65)

Quadrat ABFG = Parallelogr. BFRC.

Denn beyde stehen auf derselben Grundlinie BF und zwischen denselben Parallellinien BF und GC.

Auch ist (§. 65)

Rechteck BCNM = Parallelogr. BFRC.

Denn beyde stehen auf derselben Grundlinie BC und zwischen denselben Parallellinien BC und FN.

Daher ist

Quadrat ABFG = Parallelogr. BCNM.

Eben so ist (§. 65)

Quadrat ACIH = Parallelogr. CISB.

Denn beyde stehen auf derselben Grundlinie CI und zwischen denselben Parallellinien CI und BH.

Auch ist (§. 65)

Rechteck CQPB = Parallelogr. CISB.

Denn beyde stehen auf derselben Grundlinie BC und zwischen denselben Parallellinien BC und IP.

Daher ist

Quadrat ACIH = Rechteck CQPB.

Es war aber Rechteck CQPB = Rechteck EMND, mithin ist auch

Quadrat ACIH = Rechteck EMND.

Oben war auch

Quadrat ABFG = Rechteck BCNM.

Folglich ist

$$ACIH + ABFG = EMND + BCNM$$

oder

$$ACIH + ABFG = BCDE.$$

(Clavius S. 76; Müller's 6ter Bew., S. 37).

Anm. Dieser Beweis fordert mehr Aufwand als die beyden vorhergehenden. Er hat das Besondere, daß die gerade Linie MN, welche das Quadrat der Hypotenuse in die zwey Rechtecke theilt, mit der Hypotenuse parallel, und nicht wie in den andern Beweisen, wo das Quadrat der Hypotenuse in zwey Rechtecke getheilt wird, durch den Scheitelpunkt A des rechten Winkels des rechtwinkligen Dreyecks geht.

Art. 199. Lehrs. Das Quadrat der Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreyecks ist viermal so groß als das rechtwinklige Dreyeck.

Bew. (Fig. 183). ABC sey das gleichschenklige Dreyeck, rechtwinklig in A; BCHG sey das Quadrat der Hypotenuse BC. Man ziehe AH und AG.

Da das △ ABC gleichschenklig ist, so ist W. ACB = ABC (§. 43); nun ist, da der W. BAC ein rechter ist, auch ACB + ABC = 1 R.; mithin ACB = $\frac{1}{2}$ R. Also ist auch ACH = BCH — ACB = $\frac{1}{2}$ R. Mithin ist W. ACH = ACB; ferner ist CH = CB, als Seiten desselben Quadrats, und CA = CA; also △ ACH ≅ ACB.

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß △ ABG ≅ ACB ist.

Mithin ist auch AG = AB und AH = AC; ferner GH = BC; also auch △ GAH ≅ ABC.

Die vier Dreyecke, die zusammen das Quadrat BCHG ausmachen, sind also alle dem △ ABC gleich.

Das Quadrat BCHG ist demnach viermal so groß als das △ ABC.

Coetsius p. 168).

Art. 200. Lehrs. Das Quadrat der Hypotenuse eines ungleichseitigen rechtwinkligen Dreyecks ist immer größer denn viermal so groß als das rechtwinklige Dreyeck; und zwar um das Quadrat des Unterschiedes der beyden Katheten desselben.

Bew. (Fig. 199). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck, BC die Hypotenuse, der Kathete AC > AB.

Man ziehe BF ∥ AC, und CF ∥ AB. Ferner fälle man das Perpendikel EG auf BF, das Perpendikel DH auf EG, und verlängere CF bis sie die DH in I trifft.

ABFC ist ein Parallelogramm (§. 25); und zwar, da A ein rechter Winkel ist, ein Rechteck; also △ BFC ≅ BAC (§. 55). BF ist also = AC, FC = AB; und W. BFC, ACF und ABF sind rechte Winkel.

Ferner ist W. EBG = CBA (denn jeder macht mit CBG einen rechten), W. BGE = BAC (denn beyde sind rechte Winkel, dieser nach der Construction, und jener nach der Vor-

aussetzung), und BE = BC, als Seiten desselben Quadrats. Also ist △ BGE ≌ BAC. EG ist daher = AC, und BG = AB.

Ferner ist W. DEH = EBG (denn jeder macht mit GEB einen rechten; nämlich jener macht mit GEB den W. DEB des Quadrats, und dieser macht mit GEB die beyden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreyecks), W. EHD = BGE, als rechte Winkel, und ED = EB. Also ist △ EHD ≌ BGE ≌ BAC. Daher ist DH = AC und EH = AB.

Da W. EHD = BGE ist, so ist DH ll BF (§. 19), also auch W. DIC = CFB (§. 17) = 1 R. = BAC. Ferner ist W. ICD = ACB (denn jeder macht mit FCB einen rechten) und CD = BC. Also ist auch △ CID ≌ CAB. Daher auch CI = AC und DI = AB.

Es sind demnach die vier Dreyecke BFC, EGB, DHE, CID zusammen viermal so groß als das △ ABC.

Da die vier Linien BF, EG, DH, CI der Seite AC, und die vier Linien BG, EH, DI, CF der Seite AB des rechtwinkligen Dreyecks ABC gleich sind, so sind sowohl jene vier unter einander, als auch diese vier unter einander gleich. Da ferner, nach der Voraussetzung, AC > AB ist, so ist eine jede von jenen vier Linien größer denn eine jede von diesen vier Linien. Von den vier mit ABC congruenten Dreyecken innerhalb des Quadrats BCDE fällt also keines zum Theil auf das andere. Vielmehr lassen diese vier Dreyecke von dem Quadrat BCDE noch ein Viereck FGHI übrig, um welches das Quadrat BCDE größer denn diese vier Dreyecke, oder größer denn viermal so groß als das △ ABC ist.

Da BF = EG = DH = CI und BG = EH = DI = BF, so ist auch BF — BG = EG — EH = DH — DI = CI — CF oder FG = GH = HI = IF. Das Viereck FGHI ist also gleichseitig. Die vier Winkel dieses Vierecks sind zugleich die Nebenwinkel der vier rechten Winkel der vier congruenten Dreyecke, also ebenfalls rechte Winkel. Das Viereck FGHI ist also ein Quadrat.

Die Seite FG dieses Quadrats ist $=$ BF — BG $=$ AC — AB $=$ dem Unterschied der beyden Katheten des rechtwinkligen Dreyecks.

Das Quadrat BCDE ist also um das Quadrat des Unterschieds der beyden Katheten des $\triangle$ ABC größer denn viermal so groß als dieses Dreyeck.

(Coetsius p. 170).

Art. 201. Lehrs. Wie Art. 185.

Bew. (Fig. 199). ABC sey das rechtwinklige Dreyeck, BC die Hypotenuse, AB, AC die beyden Katheten, und unter diesen vorerst AC der größere. [Art. 200].

Das Quadrat der Hypotenuse ist um das Quadrat des Unterschiedes der beyden Katheten größer denn das Vierfache des rechtwinkligen Dreyecks (Art. 200).

Der Inhalt des $\triangle$ ABC ist $= \frac{1}{2}$ AB. AC (§. 77), also das Vierfache desselben $=$ 2 AB. AC.

Das Quadrat des Unterschieds der beyden Katheten ist

$$= (AC - AB)^2$$
$$= AC^2 - 2.\ AB.\ AC + AB^2.$$

Also ist

$$BC^2 = 2.\ AB.\ AC + (AC - AB)^2$$
$$= 2.\ AB.\ AC + AC^2 - 2.\ AB.\ AC + AB^2$$

folglich

$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

Wäre ferner AB $=$ AC, so wäre $(AC - AB)^2 = 0$ also

$$BC^2 = 2.\ AB.\ AC = 2.\ AB^2 = AC^2 + AB^2.$$

Wäre endlich AB $>$ AC, so wäre $(AB - AC)^2 = AB^2 - 2.\ AB.\ AC + AC^2$, wie oben, also wieder

$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

Anm. Dieser Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes gründet sich auf einen besonderen Hülfssatz (Art. 200), der von den drey Quadraten übrigens nur das Quadrat der Hy-

potenuse construirt; und außerdem auf die Regeln der Buchstabenrechnung. Coetsius sagt S. 172, er sey vom Christophorus Sturmius. In Müller ist er der dritte.

Es braucht nicht erinnert zu werden, daß die beyden Beweise des Art. 200 und 201 sehr gut in einen verschmolzen werden können.

---

a. Aufg. Ein Quadrat zu verfertigen, das so groß, als zwey gegebene zusammen genommen, ist.

b. Aufg. Ein Quadrat zu verfertigen, das der Differenz zweyer gegebenen Quadrate gleich ist.

c. Aufg. Ein Quadrat zu verfertigen, das zweymal so groß, als ein gegebenes ist.

d. Aufg. Ein Quadrat zu verfertigen, das drey- vier- fünf- u. s. w. mal so groß als ein gegebenes ist.

Anm. 1. Ein vierfachrs, neunfaches, sechzehnfaches u. s. w. Quadrat erhält man, wenn man die Seiten zwey- drey- vier- u. s. w. mal so groß nimmt. — Ein dreyfaches erhält man durch Vereinigung des einfachen mit dem doppelten, nach Aufg. a; oder durch Wegnahme des einfachen vom vierfachen, nach Aufg. b. — Ein fünffaches erhält man durch Zusammensetzung des vierfachen und einfachen, oder des dreyfachen und doppelten; oder durch Wegnahme des vierfachen vom neunfachen. U. s. w.

Anm. 2. Hierher gehört auch die Verfertigung eines Quadratmaßstabes (S. Klügel IV. S. 4; Gilbert S. 443 u. s. w.), der z. B. beym Visiren der Fässer gebraucht wird.

e. Aufg. Ein Quadrat zu verfertigen, das halb so groß als ein gegebenes ist.

Anm. Ueber Verfertigung eines Quadrats, das den dritten, vierten, fünften u. s. w. Theil so groß als ein gegebenes ist, s. oben S. 340. Es läßt sich also auch ein Quadrat verfertigen, das $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ u. s. w. eines gegebenen ist.

f. Aufg. Ein Quadrat zu verfertigen, das drey, vier, fünf u. s. w. gegebenen zusammen genommen gleich ist.

g. Aufg. Wenn die beyden Katheten eines rechtwinkligen Dreyecks in Zahlen gegeben sind, die Hypotenuse zu berechnen.

h. Aufg. Wenn die Hypotenuse und ein Kathete eines rechtwinkligen Dreyecks in Zahlen gegeben sind, den andern Katheten zu berechnen.

Anm. Beyspiele, wo die drey Seiten eines rechtwinkligen Dreyecks in lauter rationalen Zahlen angegeben werden können, s. Art. 202.

i. Lehrs. Die Seite eines Quadrats und seine Diagonale lassen sich nicht durch zwey rationale Zahlen ausdrücken.

k. Lehrs. Wenn zwey rechtwinklige Dreyecke gleiche Winkel haben, so ist das Quadrat der Summe beyder Hypotenusen den Quadraten der Summen der den gleichen Winkeln gegen über liegenden Katheten zusammen genommen gleich. (Pappus lib. V. prop. 6).

Der Beweis wird dadurch geführt, daß man ein Dreyeck construirt, worin die Seiten den Summen der gleichnamigen Seiten der beyden gegebenen Dreyecke gleich sind.

Nach §. 79.

Pythagoräische Dreyecke. Art. 202—204.

Art. 202. Erklärung. Rechtwinklige Dreyecke, deren drey Seiten gegen einander rational sind, heißen Pythagoräische Dreyecke.

Aufg. Pythagoräische Dreyecke anzugeben.

Aufl. Man nehme irgend zwey ganze Zahlen a und b beliebig an, und zwar $a > b$; so werden die drey Seiten des rechtwinkligen Dreyecks gegen einander rational, wenn man den einen Katheten $= a^2 - b^2$, den andern Katheten $= 2ab$ und die Hypotenuse $= a^2 + b^2$ setzt.

Bew. Es ist

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2$$
$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2$$

Nimmt man also zu den drey Seiten eines Dreyecks die erste $= a^2 - b^2$, die zweyte $= 2ab$ und die dritte $= a^2 + b^2$, so ist das Dreyeck rechtwinklig, und die drey Seiten sind gegen einander rational.

(Kries S. 377).

Anm. 1. Einige Beyspiele:

1) $a = 2, b = 1$, gibt $a^2 - b^2 = 3, 2ab = 4, a^2 + b^2 = 5$
2) $a = 3, b = 2$, gibt die Zahlen: 5, 12, 13
3) $a = 3, b = 1$, — — 8, 6, 10
4) $a = 4, b = 3$, gibt: 7, 24, 25
5) $a = 4, b = 2$, gibt: 12, 16, 20
6) $a = 4, b = 1$, gibt: 15, 8, 17
7) $a = 5, b = 4$, gibt: 9, 40, 41
8) $a = 5, b = 3$, gibt: 16, 30, 34
9) $a = 5, b = 2$, gibt: 21, 20, 29
10) $a = 5, b = 1$, gibt: 24, 10, 26.

U. s. w.

Anm. 2. Wenn man die Zahlen eines solchen Beyspiels mit der nämlichen vierten Zahl multiplicirt, so geben die drey Producte wieder Pythagoräische Dreyecke.

Anm. 3. Die Zahlen für die Pythagoräischen Dreyecke können dazu angewandt werden, um in einem Punkt einer geraden Linie ein Perpendikel auf dieselbe zu errichten.

Art. 203. Aufg. Wie Art. 202.

Aufl. „Man nehme eine beliebige ungerade Zahl als kleineren Katheten an, quadrire dieselbe, und subtrahire 1 vom Quadrate; so ist die Hälfte des Restes der größere Kathete. Zu diesem größeren Katheten 1 addirt, gibt die Hypotenuse.“

Bew. Setzt man die beliebige ungerade Zahl $= a$, so erhält man

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^4-2a^2+1}{4} = \frac{a^4+2a^2+1}{4}$$

$$= \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2-1}{2}+1\right)^2$$

Nimmt man also zu den drey Seiten eines Dreyecks die erste $= a$, die zweyte $= \frac{a^2-1}{2}$, und die dritte $= \frac{a^2-1}{2} + 1$; so ist das Dreyeck rechtwinklig, und die drey Seiten sind gegen einander rational.

(Procl. Baroc. p. 271).

Anm. 1. „Setzt man z. B. den kleineren Katheten $= 3$, so ist das Quadrat davon $= 9$; davon 1 subtrahirt, bleibt 8; davon die Hälfte gibt 4, als größeren Katheten. Dazu 1 addirt, gibt 5 zur Hypotenuse."

Anderes Beyspiel: 13, 84 und 85.

Anm. 2. Alle die Pythagoräischen Dreyecke, die man auf diese Weise erhält, haben das Besondere, daß die Hypotenuse immer nur um 1 größer als der größere Kathete ist. Es gibt nun aber auch Pythagoräische Dreyecke, deren Hypotenuse um 2, 3, 4 u. s. w. größer als der größere Kathete ist. Um Dreyecke zu finden, deren Hypotenuse um eine beliebige Zahl größer als der eine der beyden Katheten ist, setze man den einen Katheten $= a$, und den Unterschied zwischen der Hypotenuse und dem andern Katheten allgemein $= d$; so wird der andere Kathete $= \frac{a^2 - d^2}{2d}$ und die Hypotenuse $= \frac{a^2 + d^2}{2d}$

Denn es ist

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - d^2}{2d}\right)^2 = \frac{4a^2d^2 + a^4 - 2a^2d^2 + d^4}{4d^2}$$

$$= \frac{a^4 + 2a^2d^2 + d^4}{4d^2} = \left(\frac{a^2 + d^2}{2d}\right)^2$$

also sind die so gefundenen Seiten des rechtwinkligen Dreyecks gegen einander rational; und zwar ist die Differenz zwischen der Hypotenuse und einem der beyden Katheten

$$= \frac{a^2 + d^2}{2d} - \frac{a^2 - d^2}{2d} = \frac{a^2 + d^2 - a^2 + d^2}{2d}$$

$$= \frac{2d^2}{2d} = d.$$

Setzt man z. B. a = 8, d = 2, so ist der andere Kathete = 15 und die Hypotenuse = 17. (Kries S. 378). — Verlangt man für die 3 Seiten des rechtwinkligen Dreyecks lauter ganze Zahlen, so darf man nur a^2 so nehmen, daß es durch 2d theilbar ist.

Art. 204. Aufg. Wie Art. 202.

Aufl. „Man nehme eine beliebige gerade Zahl als einen Katheten an, theile dieselbe durch 2, quadrire die gefundene Hälfte, und zu diesem Quadrate addire man 1, so erhält man die Hypotenuse. Subtrahirt man aber 1 von dem Quadrate, so erhält man den andern Katheten".

Bew. Setzt man die beliebige gerade Zahl = a, so erhält man

$$a^2 + \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1\right]^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$$

$$= 4\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1 = \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1\right]^2$$

Nimmt man also zu den drey Seiten eines Dreyecks die erste = a, die zweyte $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$, und die dritte $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$; so ist das Dreyeck rechtwinklig, und die drey Seiten sind gegen einander rational.

(Procl. Baroc. p. 271).

Anm. 1. „Setzt man z. B. den einen Katheten = 4, so ist das Quadrat von der Hälfte wieder = 4; nimmt man davon 1 weg, so erhält man den einen Katheten = 3; setzt man zu dem Quadrate aber 1 hinzu, so erhält man die Hypotenuse = 5."

Andere Beyspiele: 8, 15, 17; 84, 1763, 1765.

Anm. 2. Hier ist die Differenz zwischen der Hypotenuse und dem einen Katheten immer = 2. Wenn diese Differenz irgend eine andere Zahl seyn soll; so kömmt wieder die Anm. 2 zu Art. 203 zur Anwendung.

Anm. 3. Ich habe dte Auflösungen zu Art. 203 und 204 mit ihren Beyspielen ungefähr so hergesetzt, wie sie in Procl. l. c. S. 271 und 272 stehen. So gewährt es immer einiges historisches Interesse. Proklus schreibt die erste Auflösung dem Pythagoras, und die letzte dem Plato zu. Daß man in jener eine ungerade und in dieser eine gerade Zahl annehme, ist nur dann nothwendig, wenn man für die drey Seiten des Dreyecks lauter ganze Zahlen verlangt. In der ersten Auflösung ist die angenommene Zahl immer der kleinere Kathete; in der zweyten Auflösung gibt die angenommene Zahl 4 den größeren, von 6 an aber gibt die angenommene Zahl immer den kleineren Katheten.

Anm. 4. Eine ausführlichere Abhandlung über die Pythagoräischen Dreyecke findet man in der oben S. 373 angef. Schrift von J. W. Müller, das. S. 83—109.

Art. 205. Lehrs. Wenn in einem Dreyeck das Quadrat der einen Seite den Quadraten der beyden andern Seiten zusammen genommen gleich ist, so ist der von diesen eingeschlossene Winkel ein rechter.

Bew. (Fig. 200). Es sey in dem △ ABC

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Man errichte in A das Perpendikel AD auf AC, mache AD = AB und ziehe DC, so ist (§. 79)

$$DC^2 = AD^2 + AC^2$$

also auch

$$DC^2 = AB^2 + AC^2$$

daher

$$DC^2 = BC^2$$

folglich DC = BC. In den beyden Dreyecken BAC und DAC sind also die drey Seiten gleich; sie sind also selbst congruent. Folglich ist

W. BAC = W. DAC = 1 R.

(Euklid I. Satz 48).

Erweiterungen und Anwendungen des Pythagoräischen Lehrsatzes auf spitz- und stumpfwinklige Dreyecke, und auf in den Dreyecken gezogene gerade Linien. Art. 206 bis 220.

Art. 206. Lehrs. In jedem stumpfwinkligen Dreyeck ist das Quadrat der Seite, die dem stumpfen Winkel gegen über steht, größer als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten;

und zwar, wenn man aus dem einen spitzen Winkel ein Perpendikel auf die Verlängerung der gegen über liegenden Seite fällt, um das doppelte Rechteck, das von dieser Seite und der zwischen dem stumpfen Winkel und dem Perpendikel enthaltenen Verlängerung gebildet wird.

Oder (Fig. 201) es ist

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2. AC \times AD.$$

Bew. Es ist

$$BC^2 = BD^2 + CD^2$$

Nun ist

$$CD = AC + AD$$

also, wenn man auf beyden Seiten quadrirt,

$$CD^2 = AC^2 + 2. AC \times AD + AD^2$$

daher

$$BC^2 = BD^2 + AC^2 + 2. AC \times AD + AD^2.$$

Da nun $BD^2 + AD^2 = AB^2$ ist, so ist

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2. AC \times AD.$$

(Euklid II. Satz 12).

Art. 207. Lehrs. In jedem Dreyeck ist das Quadrat

einer Seite, die einem spitzen Winkel gegen über steht, kleiner als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten;

und zwar, wenn man aus dem einen anliegenden Winkel ein Perpendikel auf die gegen über liegende Seite oder deren Verlängerung fällt, um das doppelte Rechteck, das von dieser Seite und dem zwischen dem spitzen Winkel und dem Perpendikel enthaltenen Abschnitt gebildet wird.

Oder es ist (Fig. 202)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2. AC \times AD.$$

Bew. Es ist

$$BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

Nun ist

$$CD \text{ entweder } = AC - AD$$
$$\text{oder } = AD - AC.$$

In beyden Fällen ist

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2\,AC \times AD.$$

Daher ist

$$BC^2 = BD^2 + AC^2 + AD^2 - 2\,AC \times AD$$

also auch, da $BD^2 + AD^2 = AB^2$ ist,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2. AC \times AD.$$

(Euklid II. Satz 13).

Anm. 1. Die beyden Lehrsätze (Art. 206 und 207) sind gleichsam eine Erweiterung des Pythagoräischen Lehrsatzes. Beyde gehen in denselben über, wenn der schiefe Winkel in den rechten übergeht. Dann ist nämlich der Abschnitt $CD = 0$, und es bleibt bloß $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Anm. 2. In der Trigonometrie wird von beyden Sätzen Anwendung gemacht, um aus zweyen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu berechnen. Vgl. Lehrbuch Geom. §. 203 und 217.

Art. 208. Lehrs. Wie Art. 206.

Bew. (Fig. 203). Das △ BAC sey stumpfwinklig in A; auf den drey Seiten seyen die Quadrate BCKI, ABGH und ACEF beschrieben; BD sey senkrecht auf die Verlängerung von CA gezogen, und es sey das Rechteck DAFN vollendet.

indem nämlich BD und EF bis zu ihrem Durchschnittspunkt N verlängert worden: so ist zu beweisen, daß

$$BCKI = ABGH + ACEF + 2 \times DAFN$$

sey.

Man ziehe durch A die AO der BI oder CK parallel, so zerfällt dadurch das Quadrat BCKI in die beyden Rechtecke LOKC und LOIB.

Ferner ziehe man AK and BE; so ist AC = CE, CK = CB (als Seiten desselben Quadrats) und W. ACK = ECB (denn jeder besteht aus einem rechten Winkel, und dem W. ACB); also ist △ ACK ≅ ECB (§. 39).

Nun ist Rechteck LOKC = 2. △ ACK und Rechteck NDCE = 2. △ ECB (§. 39).

Folglich ist Rechteck LOKC = Rechteck NDCE.

Wenn man ferner das Perpendikel CM auf die Verlängerung von BA fällt, und dasselbe verlängert, bis es die Verlängerung von GH in P trifft; so entsteht das Rechteck BGPM. Zieht man AI und GC, so läßt sich, auf eine ähnliche Art wie vorhin, durch die Congruenz der beyden Dreyecke ABI und GBC beweisen, daß

Rechteck LOIB = Rechteck BGPM

ist.

Daher ist LOKC + LOIB oder

$$\text{Quadrat } BCKI = NDCE + BGPM$$
$$= ACEF + ABGH + DAFN + AHPM.$$

Man ziehe HC und BF, so läßt sich auf ähnliche Art, wie schon zweymal geschehen ist, beweisen, daß Rechteck AHPM = Rechteck DAFN ist.

Folglich ist

$$BCKI = ACEF + ABGH + 2 \times DAFN.$$

Art. 209. Lehrs. Wie Art. 207.

Bew. (Fig. 204). ABC sey ein spitzwinkliges Dreyeck; auf den drey Seiten seyen die Quadrate BCKI, ABGH und ACEF beschrieben; und BD sey senkrecht auf AC und bis nach E in N verlängert: so ist zu beweisen, daß

27 *

$$BCKI = ABGH + ACEF - 2 \times DAFN$$

ist.

Man ziehe durch A die AO der BI oder CK parallel, so zerfällt dadurch das Quadrat BCKI in die beyden Rechtecke LOKC und LOIB.

Ferner ziehe man AK und BE; so ist AC = CE, CK = CB und W. ACK = ECB; also △ ACK ≅ ECB (§. 39).

Nun ist Rechteck LOKC = 2. △ ACK und Rechteck NDCE = 2. △ ECB (§. 69).

Folglich ist Rechteck LOKC = Rechteck NDCE.

Wenn man ferner die CP der BG oder AH parallel zieht, so zerfällt dadurch das Quadrat ABGH in die beyden Rechtecke BGPM und AHPM. Zieht man AI und GC, so läßt sich, auf eine ähnliche Art wie vorhin, durch die Congruenz der beyden Dreyecke ABI und GBC beweisen, daß

Rechteck LOIB = Rechteck BGPM.

Daher ist LOKC + LOIB oder

$$\text{Quadrat } BCKI = NDCE + BGPM$$
$$= ACEF + ABGH - DAFN - AHPM.$$

Man ziehe HC und BF, so läßt sich auf ähnliche Art, wie schon zweymal geschehen ist, beweisen, daß Rechteck AHPM = DAFN ist.

Folglich ist

$$BCKI = ACEF + ABGH - 2 \times EAFN.$$

Anm. Diese sehr einfache und anschauliche Art, den 12ten und 13ten Satz von Euklids IItem Buche zu beweisen, findet sich als Zugabe von Crelle zu Legendre III, prop. 12 und 13. — Der Beweis des Falles, wo im stumpfwinkligen Dreyeck eine Seite betrachtet wird, die einem der beyden spitzen Winkel gegen über liegt, bleibt dem Leser überlassen.

Art. 210. Lehrs. Die Differenz der Quadrate zweyer Seiten eines jeden Dreyecks ist der Differenz der Quadrate derjenigen beyden Abschnitte der dritten Seite gleich, welche

entstehen, wenn auf dieselbe aus der gegen über liegenden Ecke ein Perpendikel gefällt wird.

Bew. (Fig. 202). Es sey im △ ABC die gerade Linie BD senkrecht auf AC oder deren Verlängerung; so ist

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

und

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

also

$$AB^2 - BC^2 = BD^2 + AD^2 - BD^2 - DC^2$$

oder

$$AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2.$$

(Th. Simpson p. 35).

Art. 211. Lehrs Die Quadrate zweyer Seiten eines jeden Dreyecks zusammen genommen sind zweymal so groß als das Quadrat der halben dritten Seite und das Quadrat derjenigen geraden Linie zusammen genommen, welche aus der gegen über liegenden Ecke des Dreyecks nach der Mitte dieser dritten Seite gezogen wird. [Art. 206 und 207].

Bew. (Fig. 205). In dem △ ABC sey CD nach der Mitte von AB gezogen, so steht CD entweder senkrecht oder schief auf AB.

1. Wenn CD senkrecht auf AB steht, so ist

$$AC^2 = CD^2 + AD^2$$

und

$$BC^2 = CD^2 + BD^2$$

also, da $BD^2 = AD^2$ ist,

$$AC^2 + BC^2 = 2.\ CD^2 + 2.\ AD^2$$

2. Wenn CD schief auf AB steht, so sey W. CDA der stumpfe und W. CDB der spitze Winkel. Man fälle das Perpendikel CE auf DB (oder deren über B hinaus gehende Verlängerung); so ist im △ ADC (nach Art. 206)

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2.\ AD.\ DE$$

und im △ CDB (nach Art. 207)

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2.\ BD.\ DE$$

alſo

$$AC^2 + BC^2 = 2.CD^2 + AD^2 + BD^2 + 2.AD.DE - 2.BD.DE.$$

Da nun AD = BD iſt, ſo iſt

$$AD^2 + BD^2 = 2. AD^2$$

und

$$2. AD. DE - 2. BD. DE = 0.$$

alſo

$$AC^2 + BC^2 = 2. CD^2 + 2. AD^2.$$

(Th. Simpson p. 37).

Art. 212. Lehrſ. Die Summe der Quadrate der beyden Diagonalen eines jeden Parallelogramms iſt der Summe der Quadrate der vier Seiten gleich. [Art. 67 und 211].

Bew. (Fig. 73). Da ſich die Diagonalen eines jeden Parallelogramms wechſelſeitig halbiren (Art. 67), ſo iſt im △ ABC (nach Art. 211)

$$AB^2 + BC^2 = 2. BE^2 + 2. EC^2$$

und im △ ADC

$$AD^2 + DC^2 = 2. DE^2 + 2. EC^2$$

alſo

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2. BE^2 + 2. DE^2 + 4. EC^2$$

Nun iſt

$$2. BE^2 + 2. DE^2 = 2. BE^2 + 2. BE^2 = 4. BE^2 = (2. BE)^2 = BD^2$$

und

$$4. EC^2 = (2. EC)^2 = AC^2$$

alſo

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BD^2 + AC^2.$$

(Th. Simpson p. 37).

Art. 213. Lehrſ. Wenn von irgend einem Punkte gerade Linien nach den vier Ecken eines Rechtecks gezogen werden, ſo iſt die Summe der Quadrate zweyer derſelben, die nach zweyen entgegen geſetzten Ecken des Rechtecks gehen, der Summe der Quadrate der beyden andern gleich [Art. 211].

Bew. (Fig. 206). Aus einem beliebigen Punkte F seyen nach den vier Ecken eines Rechtecks ABCD die vier geraden Linien FA, FB, FC, FD gezogen, so ist zu beweisen, daß

$$FA^2 + FC^2 = FB^2 + FD^2$$

sey.

Man ziehe die Diagonalen AC und BD, welche sich in E wechselseitig in ihrer Mitte durchschneiden, und ziehe FE; so ist im △ FAC (Art. 211)

$$FA^2 + FC^2 = 2. FE^2 + 2. AE^2$$

und im △ FBD (Art. 211)

$$FB^2 + FD^2 = 2. FE^2 + 2. DE^2$$

Nun ist △ DAB ≅ ABC (§. 39), also DB = AC, daher auch $\frac{1}{2}$ DB = $\frac{1}{2}$ AC oder DE = AE, mithin

$$2. FE^2 + 2. AE^2 = 2. FE^2 + 2. DE^2$$

folglich auch

$$FA^2 + FC^2 = FB^2 + FD^2$$

(Th. Simpson p. 38).

Anm. Es ist hier einerley, ob der Punkt F innerhalb, oder, wie F′, außerhalb des Rechtecks liegt. Er braucht sogar mit dem Rechteck ABCD nicht in derselben Ebene zu liegen. Dann läßt er sich als die Spitze einer vierseitigen Pyramide mit rectangulärer Grundfläche betrachten; und es gilt also von solchen Pyramiden der Satz, daß die Summe der Quadrate zweyer gegen über liegenden Seitenkanten der Summe der Quadrate der beyden andern Seitenkanten gleich ist.

Art. 214. Lehrs. In jedem Trapez übertrifft die Summe der Quadrate der vier Seiten, die Summe der Quadrate der beyden Diagonalen; und zwar um das Quadrat der geraden Linie, welche, wenn man zwey an einander liegende Seiten des Trapezes zu einem Parallelogramm vollendet, die vierte Ecke dieses Parallelogramms mit der vierten Ecke des Trapezes verbindet. [Art. 212].

Bew. (Fig. 207). ABCD sey ein beliebiges Trapez, AC und BD seine Diagonalen; die beyden Seiten AB und

BC mit dem eingeschlossenen Winkel ABC seyen zu dem Parallelogramm ABCE vollendet, und es sey DE gezogen: so ist zu beweisen, daß

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$$

ist.

Man ziehe des Parallelogramms ABCE andere Diagonale BE. Ferner ziehe man BF ll ED und CF ll AD, bis sie sich in F durchschneiden; so ist W. EBF = BED (§. 17). Da nun auch W. EBC = BEA (§. 17); so ist W. EBF — EBC = BED — BEA oder W. CBF = AED. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß W. BCF = EAD ist Daher ist △ BCF ≅ EAD (§. 40); mithin BF = DE und CF = AD. Wenn man also FE und FA zieht, so sind DEFB und ADCF ebenfalls Parallelogramme (§, 59). Man ziehe noch die Diagonale DF, die beyden Parallellogrammen gemeinschaftlich ist; so ist (Art. 212) aus dem Parallelogramm ADCF

$$2.\ AD^2 + 2.\ CD^2 = AC^2 + DF^2$$

also

$$DF^2 = 2.\ AD^2 + 2.\ CD^2 - AC^2$$

und aus dem Parallelogramm DEFB

$$2.\ BD^2 + 2.\ DE^2 = BE^2 + DF^2$$

also

$$DF^2 = 2.\ BD^2 + 2.\ DE^2 - BE^2.$$

Setzt man die beyden Werthe für DF einander gleich, so wird

$$2.AD^2 + 2.CD^2 - AC^2 = 2.BD^2 + 2.DE^2 - BE^2$$

also

$$2.AD^2 + 2.CD^2 = 2.BD^2 + 2.DE^2 + AC^2 - BE^2.$$

Nun ist aber (Art. 212) aus dem Parallelogramm ABCE

$$2.\ AB^2 + 2.\ BC^2 = AC^2 + BE^2.$$

Addirt man diese Gleichung zu jener, so erhält man

$$2.\ AD^2 + 2.\ CD^2 + 2.\ AB^2 + 2.\ BC^2 = 2.\ BD^2 + 2.\ DE^2 + 2.\ AC^2$$

folglich

$$AD^2 + CD^2 + AB^2 + BC^2 = BD^2 + DE^2 + AC^2$$

Anm. 1. Dieser Lehrsatz mit einigen sogleich zu erwähnenden Folgerungen rührt von Euler her. Variae demonstrationes Geometriae, auctore L. Eulero, in den Novis Comm. Acad. Petrop. Tom. I. p. 49 ff. Gilbert hat ihn in sein Lehrgebäude aufgenommen.

Anm. 2. Da in jedem Parallelogramm (nach Art. 212) die Summe der Quadrate der vier Seiten der Summe der Quadrate der beyden Diagonalen gleich; in jedem Trapez oder Viereck, das kein Parallelogramm ist, dagegen (nach Art. 214) die Summe der Quadrate der vier Seiten größer als die Summe der Quadrate der beyden Diagonalen ist; so gibt es also kein Viereck, in welchem die Summe der Quadrate der vier Seiten kleiner als die Summe der Quadrate der beyden Diagonalen wäre.

Anm. 3. Die beyden Diagonalen AC und BE durchschneiden sich wechselseitig in ihrer Mitte (Art. 67). Der Durchschnittspunkt sey P. Halbirt man nun auch die Diagonale BD in Q, und zieht PQ; so halbirt PQ die beyden Seiten BD und BE des $\triangle$ BDE; also ist (Art. 139) PQ $= \frac{1}{2}$ DE; daher DE $=$ 2. PQ und $DE^2 = 4 . PQ^2$. Es ist also auch

$$AD^2 + CD^2 + AB^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 + 4 . PQ^2.$$

Daher läßt sich obiger Lehrsatz auch so aussprechen:

„In jedem Trapez übertrifft die Summe der Quadrate der vier Seiten die Summe der Quadrate der beyden Diagonalen um das vierfache Quadrat der geraden Linie, welche die Halbirungspunkte der Diagonalen mit einander verbindet."

Anm. 4. Je kleiner die gerade Linie PQ ist, welche die Halbirungspunkte der beyden Diagonalen des Trapezes mit einander verbindet, desto kleiner ist der Ueberschuß der Quadrate der vier Seiten über die Quadrate der beyden Diagonalen. Wenn sich die beyden Diagonalen gegenseitig in ihrer Mitte halbiren, so wird PQ = Null, und das Viereck wird ein Parallelogramm (vgl. Art. 67).

Art. 215. Lehrs. Wie Art. 212.

Bew. 1. Bey dem Rechteck ergibt sich der Satz sehr leicht durch den Pythagoräischen Lehrsatz.

2. Es sey ABCD (Fig. 208) ein schiefwinkliges Parallelogramm mit einem spitzen Winkel bey A, also einem stumpfen Winkel bey D. Man ziehe die beyden Diagonalen AC und BD, und fälle das Perpendikel DE auf AB, und das Perpendikel AF auf die Verlängerung von CD; so ist

$$DB^2 = DE^2 + EB^2 = DE^2 + (AB - AE)^2$$
$$= DE^2 + AB^2 - 2.\ AB.\ AE + AE^2$$
$$= AD^2 + AB^2 - 2.\ AB.\ AE$$

und

$$AC^2 = AF^2 + CF^2 = AF^2 + (CD + DF)^2$$
$$= AF^2 + CD^2 + 2.\ CD.\ DF + DF^2$$
$$= AD^2 + CD^2 + 2.\ CD.\ DF.$$

Da AD = BC, CD = AB und DF = AE ist, so erhält man auch

$$AC^2 = BC^2 + CD^2 + 2.\ AB.\ AE.$$

Wenn man beyde Werthe für DB^2 und AC^2 addirt, so erhält man

$$DB^2 + AC^2 = AD^2 + AB^2 + BC^2 + CD^2,$$

indem sich $-\ 2.\ AB.\ AE$ und $+\ 2.\ AB.\ AE$ gegenseitig aufheben.

Art. 216. Lehrs. Wenn man aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreyecks eine beliebige gerade Linie nach der Grundlinie zieht, so ist das Quadrat derselben und das Rechteck zwischen den beyden Abschnitten der Grundlinie zusammen genommen dem Quadrate von einer der beyden gleichen Seiten gleich.

Bew. (Fig. 209). In dem gleichschenkligen △ ABC sey AE eine beliebige gerade Linie aus der Spitze nach der Grundlinie BC, so ist zu beweisen, daß

$$AE^2 + BE \times EC = AB^2$$

ist.

Man fälle das Perpendikel AD auf BC, so ist (§. 79)

$$AB^2 = AD^2 + BD^2.$$

Es ist aber auch

$$AD^2 = AE^2 - ED^2$$

also

$$AB^2 = AE^2 + BD^2 - ED^2$$
$$= AE^2 + (BD + ED).(BD - ED)$$
$$= AE^2 + (CD + ED).(BD - ED)$$
$$= AE^2 + EC \times BE.$$

(Klügel I. S. 329).

Anm. Da AB^2 unveränderlich ist, so wird $EC \times BE$ desto größer, je kleiner AE^2 wird. AE ist aber am kleinsten, wenn es senkrecht auf BC steht. Dann wird $BE = EC$. Das Rechteck zwischen den beyden Theilen einer geraden Linie wird dann am größten, wenn die beyden Theile einander gleich sind.

Art. 217. Lehrs. Wenn man die Quadrate zweyer Seiten eines Dreyecks, ein jedes zu dem Quadrate des gegen über liegenden der beyden Abschnitte der dritten Seite, worein dieselbe durch das Perpendikel aus dem gegen über liegenden Winkel getheilt wird, addirt; so sind beyde Summen einander gleich.

Bew. Es ist (Fig. 202), wenn BD senkrecht auf AC ist,

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

und

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

also

$$AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2 \text{ (vgl. Art. 210)}$$

folglich, wenn man auf beyden Seiten $BC^2 + DC^2$ addirt,

$$AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2.$$

(Gilbert S. 305).

Art. 218. Lehrs. Wie Art. 217.

Bew. Es ist (Fig. 202), wenn BD senkrecht auf AC ist,

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

und

$$BD^2 + DC^2 = BC^2$$

also, Gleiches zu Gleichem addirt,

$$AB^2 + BD^2 + DC^2 = BC^2 + BD^2 + AD^2.$$

Nimmt man auf beyden Seiten BD^2 weg, so bleibt

$$AB^2 + DC^2 = BC^2 + AD^2.$$

Art. 219. Lehrs. Wenn alle Seiten eines Dreyecks durch gerade Linien aus den gegen über stehenden Winkeln halbirt werden, so ist die Summe der Quadrate dieser Linien $= \frac{3}{4}$ von der Summe der Quadrate der drey Seiten des Dreyecks. [Art. 211].

Bew. (Fig. 210). In dem $\triangle$ ABC seyen die Seiten AB, AC, BC durch die geraden Linien CD, BE, AF in D, E, F halbirt; so ist (Art. 211)

$$AC^2 + BC^2 = 2. CD^2 + 2. AD^2.$$

Da nun $AD = \frac{1}{2} AB$, so ist

$$AD^2 = \frac{1}{4} AB^2$$

also

$$2. AD^2 = \frac{1}{2} AB^2$$

also

$$AC^2 + BC^2 = 2. CD^2 + \frac{1}{2} AB^2$$

daher

$$AC^2 + BC^2 - \frac{1}{2} AB^2 = 2. CD^2.$$

Eben so ist

$$AC^2 + AB^2 - \frac{1}{2} BC^2 = 2. AF^2$$

und

$$BC^2 + AB^2 - \frac{1}{2} AC^2 = 2. BE^2.$$

Wenn man die drey letzten Gleichungen addirt, so erhält man

$$\frac{3}{2} AC^2 + \frac{3}{2} BC^2 + \frac{3}{2} AB^2 = 2. CD^2 + 2. AF^2 + 2. BE^2$$

oder

$$\frac{3}{2}(AC^2 + BC^2 + AB^2) = 2.(CD^2 + AF^2 + BE^2)$$

Folglich ist auch, wenn man auf beyden Seiten durch 2 dividirt,

$$\frac{3}{4}(AC^2 + BC^2 + AB^2) = CD^2 + AF^2 + BE^2.$$

(Gilbert S. 310).

Art. 220. Aufg. Auf der Seite eines schiefwinkligen Dreyecks oder deren Verlängerung einen Punkt von der Beschaffenheit zu finden, daß die Summe der Quadrate der dadurch entstehenden Abschnitte dieser Seite der Summe der Quadrate der beyden andern Seiten gleich sey. [Art. 211].

Aufl. (Fig. 211). ABC sey ein schiefwinkliges Dreyeck. Man verlängere AC nach F, mache CF = AC, ziehe BF, verlängere AB nach G, mache BG = BF, und halbire AG in O; so ist O der gesuchte Punkt.

Bew. Wenn diese Auflösung richtig ist, so kann der Punkt O mit dem Punkt B nicht zusammen fallen. Denn fiele er mit B zusammen, so wäre der eine Abschnitt der Seite AB, nämlich BO = o, und der andere Abschnitt AO wäre = AB. Es bliebe also noch zu beweisen, daß $AB^2 = AC^2 + BC^2$, oder daß das △ ABC in B rechtwinklig wäre, was gegen die Voraussetzung ist.

Es kann also der Punkt O nur entweder auf AB selbst, d. h. zwischen A und B, oder auf die Verlängerung von AB, d. h. zwischen B und G fallen.

Wenn O zwischen A und B fällt, so ist AO = AB — OB, also

$$\begin{aligned} AO^2 &= AB^2 - 2.\ AB.\ OB + OB^2 \\ &= AB\ (AB - 2.\ OB) + OB^2. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} AB - 2.\ OB &= AO + OB - 2.\ OB \\ &= AO - OB = BG \end{aligned}$$

also

$$AO^2 = AB.\ BG + OB^2$$

Wenn O zwischen B und G fällt, so ist

$$AO = OG = BG - OB$$

also

$$\begin{aligned} AO^2 &= BG^2 - 2.\ BG.\ OB + OB^2 \\ &= BG\ (BG - 2.\ OB) + OB^2. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$BG - 2.\,OB = GO + OB - 2.\,OB$$
$$= GO - OB = AO - OB = AB$$

also

$$AO^2 = AB.\,BG + OB^2,$$ wie vorhin.

Nun ist

$$AG^2 = (AB + BG)^2 = AB^2 + 2.\,AB.\,BG + BG^2.$$

Es ist aber auch

$$AG^2 = 4.\,AO^2 = 2.\,AO^2 + 2.\,AO^2$$
$$= 2.\,AO^2 + 2.\,AB.\,BG + 2.\,OB^2.$$

Mithin ist

$$AB^2 + 2.\,AB.\,BG + BG^2$$
$$= 2.\,AO^2 + 2.\,AB.\,BG + 2.\,OB^2.$$

Nimmt man auf beyden Seiten 2. AB. BG weg, so bleibt

$$AB^2 + BG^2 = 2.\,AO^2 + 2.\,OB^2$$

oder, da BG = BF ist,

$$AB^2 + BF^2 = 2.\,AO^2 + 2.\,OB^2.$$

Es ist aber auch, da im △ ABF die Seite AF durch BC in C halbirt ist (Art. 211)

$$AB^2 + BF^2 = 2.\,BC^2 + 2.\,AC^2.$$

Mithin ist

$$2.\,AO^2 + 2.\,OB^2 = 2.\,BC^2 + 2.\,AC^2$$

folglich auch

$$AO^2 + OB^2 = BC^2 + AC^2.$$

(Gilbert S. 311).

Lehrsatz des Nicole und damit verwandte Sätze.
Art. 221 bis 226.

Art. 221. Lehrs. Wenn man auf den drey Seiten eines rechtwinkligen Dreyecks Quadrate beschreibt, und die Ecken der Quadrate durch gerade Linien mit einander verbindet; so erhält man vier Dreyecke, welche unter einander gleich groß sind.

Bew. ABC (Fig. 212) sey ein rechtwinkliges Dreyeck; ACDE, ABGF und BCIH seyen die Quadrate auf den drey Seiten, und EF, GH und ID die Linien, welche die Ecken

dieser Quadrate mit einander verbinden; so ist zu beweisen, daß die vier Dreyecke ABC, AEF, BGH und DCI unter einander gleich groß sind.

1. Es ist

AF = AB, AE = AC (als Seiten der nämlichen Quadrate)

und

W. FAE = BAC (als rechte Winkel)

also

△ FAE = BAC

2. Man verlängere GB nach K und fälle aus H das Perpendikel HK; so ist, wenn man GB als die Grundlinie des Dreyecks GBH ansieht, HK seine Höhe.

Es ist jetzt

BH = BC (als Seiten desselben Quadrats)

W. x = z (denn jeder macht mit y einen Rechten)

und

W. K = BAC (als rechte Winkel)

also

△ BHK ≌ BCA

daher

HK = AC.

Es ist aber auch

GB = BA,

als Seiten desselben Quadrats.

Die beyden Dreyecke GBH und BAC haben also die gleichen Grundlinien GB und BA, und die gleichen Höhen HK und AC; sie sind folglich einander gleich.

3. Man verlängere die Seite DC nach L, und fälle das Perpendikel IL; so ist, wenn man DC als Grundlinie des Dreyecks DCI betrachtet, IL seine Höhe.

Es ist jetzt

CI = CB (als Seiten desselben Quadrats)

W. t = w (denn jeder macht mit v einen Rechten)

und

$$W. L = BAC$$ (als rechte Winkel)

also

$$\triangle CIL \cong CBA$$

daher

$$IL = BA.$$

Es ist aber auch

$$DC = CA,$$

als Seiten desselben Quadrats.

Es haben also die beyden Dreyecke DCI und CBA die gleichen Grundlinien DC und CA, und die gleichen Höhen IL und BA; sie sind folglich einander gleich.

Da nun bewiesen ist, daß von den drey Dreyecken FAE, GBH und DCI ein jedes dem Dreyeck ABC gleich ist; so folgt daraus, daß alle vier Dreyecke unter einander gleich groß sind.

Art. 222. Lehrs. Wenn man auf den drey Seiten eines rechtwinkligen Dreyecks Quadrate beschreibt, die Ecken der Quadrate durch gerade Linien mit einander verbindet, und auf diesen drey Linien wieder Quadrate beschreibt; so sind die drey letzten Quadrate zusammen genommen dreymal so groß als die drey ersten Quadrate zusammen genommen.

Bew. Es sey (Fig. 212) GHIDEF ganz dieselbe Figur wie Art. 221; auf den drey Linien GH, ID und FE seyen die Quadrate GHNM, IDPO und FEKL beschrieben: so ist zu beweisen, daß diese drey Quadrate zusammen genommen dreymal so groß seyen als die drey Quadrate ABGF, ACDE und BCIH zusammen genommen, oder daß

$$GH^2 + ID^2 + FE^2 = 3. (AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

sey.

1. Es ist, nach dem Pythagoräischen Lehrsatze,

$$FE^2 = AF^2 + AE^2 = AB^2 + AC^2.$$

2. Es ist

$$GH^2 = HK^2 + GK^2.$$

Hier ist aber (wie in Art. 221 No. 2 bewiesen worden) HK $=$ AC, also $HK^2 = AC^2$; und BK $=$ AB, also GK $= 2. AB$ und $GK^2 = 4. AB^2$; folglich

$$GH^2 = AC^2 + 4. AB^2.$$

3. Es ist

$$ID^2 = IL^2 + LD^2,$$

wo (wie in Art. 221 No. 3 bewiesen worden) IL $=$ AB, also $IL^2 = AB^2$; und CL $=$ AC, also LD $= 2. AC$ und $LD^2 = 4. AC^2$. Es ist folglich

$$ID^2 = AB^2 + 4. AC^2$$

4. Da nun

$$FE^2 = AB^2 + AC^2 \ (1)$$

$$GH^2 = 4. AB^2 + AC^2 \ (2)$$

und $$ID^2 = AB^2 + 4. AC^2 \ (3);$$

so ist auch

$$FE^2 + GH^2 + ID^2 = 6. AB^2 + 6. AC^2.$$

5. Es ist aber

$$6. AB^2 + 6. AC^2 = 3. AB^2 + 3. AC^2 + 3. AB^2 + 3. AC^2$$
$$= 3. AB^2 + 3. AC^2 + 3. BC^2$$
$$= 3. (AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

folglich auch

$$FE^2 + GH^2 + ID^2 = 3. (AB^2 + AC^2 + BC^2.)$$

Art. 223. Lehrs. Wenn man auf den drey Seiten eines rechtwinkligen Dreyecks Quadrate beschreibt, die Ecken der Quadrate durch gerade Linien mit einander verbindet, auf diesen drey Linien wieder Quadrate beschreibt, und die Ecken dieser Quadrate wieder durch gerade Linien mit einander verbindet; so entstehen drey Parallel-Trapeze, welche unter einander gleich groß sind. [Art. 221].

Bew. Man ziehe in Fig. 212, so wie sie nach Art. 222 beschrieben worden ist, noch die geraden Linien KP, LM und NO; so entstehen die Figuren EDKP, FGML und IHNO, von welchen zu beweisen ist, daß sie Parallel-Trapeze und unter einander gleich groß seyen.

1. In der Figur EDPK verlängere man die ED nach Q und R, fälle die Perpendikel KQ und PR von K und P auf QR, mache DS = DC und ziehe PS; so ist, wie sich leicht beweisen läßt,

$$\triangle \text{DSP} \cong \text{DCI}$$

und

$$\triangle \text{QEK} \cong \text{AEF}$$

Da nun die beyden Dreyecke DCI und AEF unter einander gleich groß sind (Art. 221), so sind es auch die beyden DSP und QEK; und, da diese überdem gleich große Grundlinien DS und EQ haben, so sind auch ihre Höhen PR und KQ einander gleich. Es ist daher PKQR ein Rechteck, also ED mit PK parallel und die Figur EDPK ein Parallel-Trapez.

2. Da nun auch △ SRP ≅ ACB, also SR = AC ist, so ist

$$\text{QE} = \text{ED} = \text{DS} = \text{SR}$$

also

$$\text{Rechteck PKQR} = 8.\ \text{ACB}$$

folglich

$$\text{Parallel-Trapez EDPK} = \text{PKQR} - \text{QEK} - \text{DPS} - \text{SRP} = 5.\ \text{ACB}.$$

3. In der Figur FGML verlängere man FG nach T und U, fälle die Perpendikel LT und MU auf UT, mache GV = GB und ziehe MV; so ist

$$\triangle \text{VGM} \cong \text{BGH}$$

und

$$\triangle \text{FTL} \cong \text{FAE}.$$

Die beyden Dreyecke VGM und FTL haben gleich große Grundlinien GV und FT, folglich, da sie wegen der Gleichheit der Dreyecke GBH und FAE (Art. 221) gleichen Inhalt haben, auch gleiche Höhen MU und LT. Es ist daher MLTU ein Rechteck und FGML ein Parallel-Trapez.

4. Es ist auch △ UVM ≅ BAC, also UV = BA, daher

$$\text{UV} = \text{VG} = \text{GF} = \text{FT}$$

mithin

MLTU = 8. ACB

folglich

Parallel-Trapez FGML = 5. ACB.

5. In der Figur HION verlängere man HI nach X und W, mache IX = IC und HY = HB = WY, und ziehe XO, YN und WN; so ist

△ IXO ≅ ICD

und

△ YHN ≅ BHG.

Es ist aber △ ICD = BHG (Art. 221), also auch

△ IXO = YHN.

Diese beyden Dreyecke haben überdem gleiche Grundlinien YH und IX, folglich auch gleiche Höhen; daher ist WX mit NO parallel, und HION ein Parallel-Trapez.

6. Da ferner

NY = BG = BA

WY = BC

und

W. NYW = ABC (denn sie machen mit den gleich großen Winkeln NYH und GBH zwey Rechte),

so ist das Dreyeck WNY mit dem CAB congruent, also auch

W. NWY = ACB

und, da ACB mit DCI zwey Rechte ausmacht, so macht auch NWY mit OXI zwey Rechte; es ist daher XO auch mit WN parallel, folglich WNOX ein Parallelogramm.

Da

WY = YH = HI = IX,

so ist das Parallelogramm

WNOX = 8. WNY = 8. ABC

folglich das Parallel-Trapez

HION = 5. ABC.

7. Von den drey Figuren EDPK, FGML und HION ist also in 1, 3 und 5 bewiesen worden, daß sie Parallel-Trapeze seyen. Ein jedes dieser drey Parallel-Trapeze ist aber

wie in 2, 4 und 6 gezeigt worden, fünfmal so groß als das Dreyeck ABC. Diese drey Parallel-Trapeze sind folglich auch unter einander gleich groß.

Zusatz. Da KP = 4. AC, ML = 4. AB und NO = 4. BC; so folgt daraus, daß, wenn man über den drey Linien KP, ML und NO von Neuem Quadrate beschriebe, diese zusammen genommen 16 mal so groß als die drey ersten Quadrate über den Seiten des Dreyecks ABC wären; also 4 mal so groß als die sechs Quadrate, die in Fig. 212 gezeichnet sind.

Anm. Wie ich in den Besitz der drey Lehrsätze Art. 221 bis 223 gekommen bin, weiß ich selbst nicht mehr; ich fand sie unter meinen Papieren, welche zur Aufbewahrung von dergleichen Materialien für meinen Unterricht bestimmt waren. Wahrscheinlich bin ich durch das Repertorium Commentationum a soc. litter. editarum von Reuss, Tom. VII. p. 36 zum Selbstfinden der Beweise dieser Lehrsätze veranlaßt worden, von denen ich bey meinem Unterrichte wirklich mehrmals Gebrauch gemacht habe. Die dermalige Herausgabe der Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen veranlaßte mich, das erwähnte Repertorium von Reuss, und auf seine Nachweisung die Abhandlung von François Nicole in den Mem. de Paris 1725 nachzuschlagen, wo ich denn, Statt des Lehrsatzes Art. 221, den allgemeineren, sich über jedes Dreyeck erstreckenden (Art. 224); die Lehrsätze Art. 222 und 223 hingegen nicht fand. Da die Beweise der allgemeineren Lehrsätze durch die Unterscheidung in mehre Fälle etwas lang werden, so glaube ich dem Lehrer um so mehr einen Gefallen gethan zu haben, wenn ich die besonderen vorausschickte, als sie für sich schon, durch ihre Verwandtschaft mit dem Pythagoräischen Lehrsatz, sehr interessant sind, und namentlich in vorzüglichem Grade das Interesse der Schüler erregen.

Art. 324. Lehrs. Wenn man auf den drey Seiten eines beliebigen Dreyecks Quadrate beschreibt, und die Ecken der Quadrate durch gerade Linien mit einander verbindet; so

erhält man vier Dreyecke, welche unter einander gleich groß sind.

Bew. ABC (Fig. 213, 214 und 215) sey ein beliebiges Dreyeck; ACDE, ABFG und BCIH seyen die Quadrate auf den drey Seiten, und EF, GH und ID die Linien, welche die Ecken dieser Quadrate mit einander verbinden; so ist zu beweisen, daß die vier Dreyecke ABC, AEF, BGH und DCI unter einander gleich groß sind, oder daß ein jedes der drey Dreyecke AEF, BGH und DCI dem △ ABC gleich ist.

Erster Fall. Wenn das △ ABC rechtwinklig in A ist (Fig. 213). Man fälle das Perpendikel AT auf BC, und die Perpendikel DS und GR auf die Verlängerungen von IC und HB.

Es ist W. GBR = ABT, weil jeder mit ABR einen rechten macht, W. GRB = ATB, weil beydes rechte Winkel sind, und BG = BA, als Seiten desselben Quadrats; also △ GBR ≌ ABT (§. 40), mithin GR = AT.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß △ DCS ≌ ACT, mithin DS = AT ist.

Betrachtet man in den Dreyecken ABC, DCI und GBH die Seiten BC, CI und BH als ihre Grundlinien, so sind AT, DS und GR ihre Höhen. Ihre Grundlinien sind nun unter einander gleich; eben so auch ihre Höhen. Also sind die Dreyecke unter einander gleich (§. 69).

Endlich ist noch △ EAF ≌ CAB (§. 39).

Folglich sind die vier Dreyecke ABC, EAF, DCI und GBH unter einander gleich.

Zweyter Fall. Wenn das △ ABC stumpfwinklig in A ist (Fig. 214).

Daß die drey Dreyecke ABC, DCI und GBH unter einander gleich sind, wird auf dieselbe Art wie im ersten Falle bewiesen.

Um noch zu beweisen, daß △ EAF = ABC ist, fälle man das Perpendikel EV auf AF, und das Perpendikel CW auf die Verlängerung von BA.

Es ist W. EAV = CAW, weil jeder mit EAW einen rechten macht, W. AVE = AWC, weil beydes rechte Winkel sind, und AE = AC, als Seiten desselben Quadrats; also △ AEV ≌ ACW (§. 40), mithin EV = CW.

Betrachtet man AB und AF als die Grundlinien der beyden Dreyecke ABC und AEF, so sind CW und EV ihre Höhen. Die beyden Dreyecke ABC und EAF haben nun gleiche Grundlinien und gleiche Höhen, sind also einander gleich.

Folglich sind, wenn △ ABC stumpfwinklig in A ist, die vier Dreyecke ABC, EAF, DCI und GBH unter einander gleich.

Dritter Fall. Wenn das △ ABC spitzwinklig in A ist (Fig. 215).

Daß die drey Dreyecke ABC, DCI und GBH unter einander gleich sind, wird auf dieselbe Art wie im ersten Fall bewiesen.

Um noch zu beweisen, daß △ EAF = ABC ist, fälle man das Perpendikel CW auf AB, und das Perpendikel EV auf die Verlängerung von AF.

Aus der Congruenz der Dreyecke AEV und ACW, die auf eine ähnliche Art wie im zweyten Fall bewiesen wird, ergibt sich, daß EV = CW ist.

Es ist also, aus demselben Grunde, wie im zweyten Fall, △ ABC = AEF.

Folglich sind auch, wenn △ ABC spitzwinklig in A ist, die vier Dreyecke ABC, EAF, DCI und GBH unter einander gleich.

(Proposition nouvelle de Geometrie elementaire. Par M. Nicole, in Mem. de Paris 1725 p. 21).

Art. 225. Lehrs. Wenn man auf den drey Seiten eines beliebigen Dreyecks Quadrate beschreibt, die Ecken der Quadrate durch gerade Linien mit einander verbindet, und auf diesen drey Linien wieder Quadrate beschreibt; so sind die drey letzten Quadrate zusammen genommen dreymal so groß

als die drey ersten Quadrate zusammen genommen. [Art. 206 und 207].

Bew. Das △ ABC sey entweder spitzwinklig, wie Fig. 215, oder habe in A einen rechten Winkel, wie Fig. 213 oder habe in A einen stumpfen Winkel, wie Fig. 214.

Auf den drey Seiten seyen die Quadrate ACDE, ABGF und BCIH beschrieben. EF, GH und ID seyen die Linien, welche die Ecken dieser Quadrate mit einander verbinden; so ist zu beweisen, daß

$$GH^2 + ID^2 + FE^2 = 3.(AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

sey.

[Die drey Quadrate auf den Linien GH, ID und FE wirklich zu beschreiben, ist zur Führung des Beweises nicht nöthig. Wie sie sich etwa ausnehmen, sieht man in Fig. 212].

1. Man fälle das Perpendikel AT auf BC, und die Perpendikel DS und GR auf die Verlängerungen von IC und HB.

Es ist W. GBR = ABT, weil jeder mit ABR einen rechten macht, W. GRB = ATB, weil beydes rechte Winkel sind, und BG = BA, als Seiten desselben Quadrats; also △ GBR ≌ ABT (§. 40), mithin BR = BT.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß △ DCS ≌ ACT, mithin CS = CT ist.

2. Die beyden Dreyecke HBG und ICD sind stumpfwinklig in B und C, also ist (nach Art. 206)

$$HG^2 = BG^2 + BH^2 + 2.BH \times BR$$

und

$$DI^2 = DC^2 + CI^2 + 2.CI \times CS$$

oder, da AB = BG, AC = DC, BH = CI = BC, und (nach No. 1) BT = BR und CT = CS ist,

$$HG^2 = AB^2 + BC^2 + 2.BC \times BT$$

und

$$DI^2 = AC^2 + BC^2 + 2.BC \times CT$$

also, wenn man addirt,

$$HG^2 + DI^2 = AB^2 + AC^2 + 2.\,BC^2$$
$$+ 2.\,BC.\,(BT + CT).$$

Hier ist aber

$$2.\,BC.\,(BT + CT) = 2.\,BC \times BC = 2.\,BC^2$$

also

$$HG^2 + DI^2 = AB^2 + AC^2 + 4.\,BC^2$$
$$= AB^2 + AC^2 + BC^2 + 3.\,BC^2$$

3. Für das rechtwinklige △ ABC (Fig. 213) ist nun $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Ferner ist

$$EF = BC$$

also

$$EF^2 = BC^2.$$

Nun war (No. 2)

$$GH^2 + ID^2 = AB^2 + AC^2 + 4.\,BC^2.$$

Folglich ist, wenn man addirt,

$$GH^2 + ID^2 + FE^2 = BC^2 + 4.\,BC^2 + BC^2$$
$$= 6.\,BC^2 = 3.\,BC^2 + 3.\,BC^2$$
$$= 3.\,(AB^2 + AC^2) + 3.\,BC^2$$
$$= 3.\,(AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

4. Für das stumpfwinklige △ ABC (Fig. 214) ist W. EAF ein spitzer Winkel.

Man fälle das Perpendikel EV auf AF, und das Perpendikel CW auf die Verlängerung von AB, so ist W. EAV = CAW, weil jeder mit EAW einen rechten macht, W. AVE = AWC, weil beydes rechte Winkel sind, und AE = AC, als Seiten desselben Quadrats; also △ AEV ≌ ACW (§. 40), mithin AV = AW.

In dem spitzwinkligen △ AEF ist nun (nach Art. 207)

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2.\,AF \times AV$$

oder, da AC = AE, AB = AF und AW = AV ist,

$$EF^2 = AC^2 + AB^2 - 2.\,AB.\,AW.$$

Nun war (No. 2)

$$GH^2 + ID^2 = 3.\,BC^2 + AB^2 + AC^2 + BC^2.$$

Also ist, wenn man auf beyden Seiten EF^2 addirt,

$$GH^2 + ID^2 + FE^2 = 3.\,BC^2 + AB^2 + AC^2$$
$$+ BC^2 + EF^2.$$

Da aber jetzt (Art. 206)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2.\ AB \times AW$$

und

$$EF^2 = AB^2 + AC^2 - 2.\ AB \times AW$$

ist, so ist

$$BC^2 + EF^2 = 2.\ AB^2 + 2.\ AC^2.$$

Folglich ist

$$GH^2 + ID^2 + FE^2 = 3.\ BC^2 + AB^2 + AC^2 + 2.\ AB^2 + 2.\ AC^2$$
$$= 3.\ BC^2 + 3.\ AB^2 + 3.\ AC^2$$
$$= 3.\ (AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

5. Für das spitzwinklige △ ABC (Fig. 215) ist EAF ein stumpfer Winkel.

Man fälle das Perpendikel CW auf AB und das Perpendikel EV auf die Verlängerung von AF; so ergibt sich aus der Congruenz der Dreyecke AEV und ACW, die auf eine ähnliche Art wie in No. 4 bewiesen wird, daß AV = AW ist.

In dem stumpfwinkligen △ AEF ist nun (Art. 206)

$$FE^2 = AE^2 + AF^2 + 2.\ AF \times AV$$

oder, da AC = AE, AB = AF und AW = AV ist,

$$FE^2 = AC^2 + AB^2 + 2.\ AB \times AW.$$

Nun war (No. 2)

$$GH^2 + ID^2 = 3.\ BC^2 + AB^2 + AC^2 + BC^2.$$

Also ist, wenn man auf beyden Seiten FE² addirt,

$$GH^2 + ID^2 + FE^2 = 3.\ BC^2 + AB^2 + AC^2$$
$$+ BC^2 + FE^2.$$

Da aber jetzt (Art. 207)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.\ AB \times AW$$

und

$$FE^2 = AB^2 + AC^2 + 2.\ AB \times AW$$

ist, so ist

$$BC^2 + FE^2 = 2.\ AB^2 + 2.\ AC^2.$$

Folglich ist

$$GH^2 + ID^2 + FE^2 = 3.\ BC^2 + AB^2 + AC^2 + 2.\ AB^2 + 2.\ AC^2$$
$$= 3.\ BC^2 + 3.\ AB^2 + 3.\ AC^2$$
$$= 3.\ (AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

6. Das $\triangle$ ABC mag also in A einen rechten, stumpfen oder spitzen Winkel haben, so ist immer (nach No. 3, 4 und 5)

$$GH^2 + ID^2 + FE^2 = 3. (AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

Anm. Zu dem, was in der Einleitung S. 91 ff. über die verschiedenen Fälle gesagt worden, kann der Beweis dieses Lehrsatzes als Beyspiel dienen. Der Beweis hätte dadurch noch etwas kürzer gemacht werden können, daß man dem Ausdruck in No. 2

$$HG^2 + DI^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2 + 3. BC^2$$

noch die auf alle drey Fälle passende Folgerung hinzugefügt hätte: Also ist

$$GH^2 + ID^2 + FE^2 = 3. BC^2 + AB^2 + AC^2 + BC^2 + FE^2.$$

Nun konnte man zeigen, daß in allen drey Fällen

$$BC^2 + FE^2 = 2. AB^2 + 2. AC^2$$

ist. U. s. w.

Art. 226. Lehrs. Wenn man auf den drey Seiten eines beliebigen Dreyecks Quadrate beschreibt, die Ecken der Quadrate durch gerade Linien mit einander verbindet, auf diesen drey Linien wieder Quadrate beschreibt, und die Ecken dieser Quadrate wieder durch gerade Linien mit einander verbindet; so entstehen drey Parallel-Trapeze, welche unter einander gleich groß sind.

Bew. Es sey ABC (Fig. 212) ein beliebiges Dreyeck; ACDE, ABFG und BCIH seyen die Quadrate auf den drey Seiten; EF, GH und ID seyen die Linien, welche die Ecken dieser Quadrate mit einander verbinden; EFLK, GHNM und IDPO seyen die auf diesen Linien beschriebenen Quadrate, und LM, NO und PK die geraden Linien, welche die Ecken dieser letzten Quadrate mit einander verbinden: so entstehen die Figuren IHNO, EDPK und FGML, von welchen zu beweisen ist, daß sie Parallel-Trapeze und unter einander gleich groß seyen.

1. Daß die Figur IHNO ein Parallel-Trapez sey, wird auf dieselbe Weise, wie in Art. 223 No. 5 bewiesen.

2. Daß dieses Parallel-Trapez IHNO = 5. △ ABC sey, wird auf dieselbe Weise, wie in Art. 223 No. 6 bewiesen.

3. Auf dieselbe Weise, wie von der Figur IHNO, läßt sich auch von den Figuren EDPK und FGML beweisen, daß sie Parallel-Trapeze, und eine jede = 5. △ ABC sey.

4. Da demnach ein jedes der drey Parallel-Trapeze = 5. △ ABC ist; so sind dieselben unter einander gleich.

Zus. Es läßt sich auch hier dieselbe Folgerung wie in Art. 223 machen. Was auch ABC für ein Dreyeck seyn mag: wenn man über den drey Linien KP, ML und NO von Neuem Quadrate beschriebe, so wären diese zusammen 16 mal so groß als die drey ersten Quadrate über den Seiten des △ ABC; also 4 mal so groß als die sechs Quadrate, die in Fig. 212 gezeichnet sind.

Anm. 1. Auch Nicole hat über den drey Linien EF, GH und DI von Neuem Quadrate beschrieben, und die geraden Linien NO, PK und LM gezogen. Aber er blieb nur bey den beyden Folgerungen stehen, daß 1) diese Linien den Linien HI, DE und FG parallel sind; daß also 2) die Figur MNOPKL mit der Figur GHIDEF gleichwinklig ist. Die erste Folgerung ergibt sich sehr schön aus nochmaliger Anwendung seines Lehrsatzes, indem er, um zu beweisen, daß NO ∥ HI ist, die geraden Linien NI und HO zieht. Dann hat er also ein (beliebiges) △ GBH, auf dessen drey Seiten die Quadrate GHNM, GBAF und BHIC beschrieben sind, und deren Ecken er durch die geraden Linien MF, AC und IN verbindet. Da die so entstehenden 4 Dreyecke unter einander gleich sind, so ist also auch △ NHI = ABC. Auf dieselbe Art wird gefunden, daß △ OHI = ABC ist. Also ist △ NHI = OHI. Da nun diese beyden Dreyecke gleiche Grundlinie HI und gleichen Inhalt haben, so haben sie auch gleiche Höhe. Also ist NO ∥ HI.

Anm. 2. Eine heuristische Uebung für die Schüler kann es werden, zu untersuchen, was für Verhältnisse entstehen, wenn man die Construction der Fig. 212 noch weiter fortsetzt.

Besondere Fälle der Aufgaben in Euklid VI. 28 und 29. Art. 227 und 228.

Art. 227. Aufg. Ein Rechteck zu beschreiben, wenn die Summe seiner Seiten und sein Inhalt gegeben sind.

Aufl. (Fig. 216). AB sey die Summe der beyden an einander liegenden Seiten des Rechtecks; sein Inhalt sey dem Quadrate der gegebenen Linie CD gleich.

Man halbire AB in E, errichte in E das Perpendikel EF auf AB, mache EF = CD, und mache von F aus die FG = AE, so daß der Endpunkt G auf AB liegt. In G, errichte man das Perpendikel GK auf AB, mache GK = GB und vollende das Rechteck AGKI; so ist AGKI das gesuchte Rechteck.

Bew. 1. Es ist GK = GB, also AG + GK = AG + GB = AB = der gegebenen Summe der beyden an einander liegenden Seiten des Rechtecks.

2. Ferner ist

$$\begin{aligned} AG.\,GK &= AG.\,GB \\ &= (AE + EG).\,(BE - EG) \\ &= (AE + EG).\,(AE - EG) \\ &= AE^2 - EG^2 = FG^2 - EG^2 = EF^2 \\ &= CD^2. \end{aligned}$$

Das Rechteck AGKI hat also auch den gegebenen Inhalt. (R. Simson S. 705).

Anm. 1. Es versteht sich von selbst, daß die Stücke des Rechtecks so gegeben seyn müssen, daß das Rechteck selbst möglich ist. Wenn AE oder $\frac{1}{2}$ AB = CD; so wird das Rechteck ein Quadrat. Wenn aber AE oder $\frac{1}{2}$ AB (also auch FG) < CD; so wird die Auflösung unmöglich. Die Unmöglichkeit der Auflösung in diesem Falle erhellt schon daraus, daß dann die FG nicht bis zur AB hinreicht. Sie erhellt aber auch aus dem Satze, daß unter allen Rechtecken von gegebenem Umfange das Quadrat den größten Inhalt hat, also das Rechteck, das dem Quadrate gleich seyn soll, einen größeren Umfang als das

Quadrat haben muß. Mit andern Worten, aus dem Satze: daß, wenn man die gerade Linie AB in irgend zwey Theile theilt, das Rechteck zwischen den beyden Theilen dann am größten wird, wenn beyde Theile einander gleich sind. Denn es sey die AB in E in zwey gleiche und in dem beliebigen Punkte G in zwey ungleiche Theile getheilt; so ist $AG \times GB = (AE + EG)(AE - EG) = AE^2 - EG^2$. Es ist aber AE^2 unveränderlich, also $AE^2 - EG^2$ offenbar dann am größten, wenn $EG^2 = 0$ ist (Meier Hirsch I. S. 216).

Anm. 2. Wenn die Summe aller vier Seiten eines Rechtecks gegeben ist, so ist auch die Summe zweyer an einander liegenden Seiten desselben (als die Hälfte jener Summe) gegeben. — Obige Aufgabe konnte auch so ausgedrückt werden: „Ein Rechteck von gegebenem Umfang und Inhalt zu beschreiben."

Art. 228. Aufg. Ein Rechteck zu beschreiben, wenn die Differenz seiner Seiten und sein Inhalt gegeben sind.

Aufl. (Fig. 217). AB sey die gegebene Differenz zweyer an einander liegenden Seiten des zu beschreibenden Rechtecks; sein Inhalt sey = dem Quadrate der gegebenen Linie CD.

Man halbire AB in E, errichte in B das Perpendikel BF auf AG, mache BF = CD, und ziehe EF. Hierauf verlängere man EB über B hinaus, und mache auf der so verlängerten Linie EG = EF. Endlich beschreibe man mit GH = BG und mit AG das Rechteck AGHI; so ist dieses das gesuchte.

Bew. 1. Es ist $AG - GH = AG - BG = AB$; also haben die beyden an einander liegenden Seiten des Rechtecks AGHI die gegebene Differenz.

Ferner ist

$$\begin{aligned} EF^2 &= EG^2 = (EB + BG)^2 \\ &= EB^2 + 2.\,EB.\,BG + BG^2; \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} CD^2 &= BF^2 = EF^2 - EB^2 \\ &= 2.\,EB.\,BG + BG^2 \\ &= AB.\,BG + BG^2 \\ &= (AB + BG).\,BG = AG.\,BG \\ &= AG.\,GH = \text{Rechteck } AGHI. \end{aligned}$$

Das Rechteck AGHI hat also auch den verlangten Inhalt. (R. Simson S. 706).

Anm. R. Simson trägt als Anmerkung zu den Sätzen 28 und 29 des VIten Buches von Euklid, und zwar als besondere Fälle der von Euklid mitgetheilten Aufgaben, folgende vier Aufgaben vor:

1) „Auf einer gegebenen geraden Linie ein Rechteck zu errichten, welches einem gegebenen Quadrate gleich ist, und ein Quadrat, zum Abgang habe; aber das gegebene Quadrat darf nicht größer seyn als jenes auf der Hälfte der gegebenen geraden Linie." Daselbst S. 705.

2) „Auf einer gegebenen geraden Linie ein Rechteck zu errichten, welches einem gegebenen Quadrate gleich ist, so daß es ein Quadrat zum Ueberfluß habe." Das. S. 706.

3) „Auf einer gegebenen geraden Linie ein Rechteck zu errichten, welches einem gegebenen Rechtecke gleich sey, und so daß es zum Abgange ein Quadrat habe; nur darf das gegebene Rechteck nicht größer seyn, als das Quadrat auf der Hälfte der gegebenen geraden Linie." Das. S. 707.

4) „Auf eine gegebene gerade Linie ein Rechteck zu errichten, welches einem gegebenen Rechtecke gleich ist, so daß es ein Quadrat zum Ueberfluß habe." Das. 708.

Dann gibt er am Schlusse einige literarische Bemerkungen über die dritte und vierte Aufgabe, deren Auflösungen und Beweise viel weitläufiger und verwickelter als von der ersten und zweyten sind, und macht S. 710 die Bemerkung:

„die dritte Aufgabe werde sonst auch wohl so ausgedrückt: Eine gegebene gerade Linie AB (s. Fig. 216) so in G zu durchschneiden, daß das Rechteck AG. GB einem gegebenen Flächenraume gleich sey; oder, welches das nämliche ist: Wenn die Summe der Seiten eines Rechtecks AB und die Größe desselben ebenfalls gegeben ist, seine Seiten zu finden."

„und die vierte Aufgabe sey die nämliche mit dieser: In einer gegebenen geraden Linie AB (s. Fig. 217), verlängert, einen Punkt zu finden, so daß das Rechteck AG. GB einem

gegebenen Flächenraume gleich sey; oder, welches das nämliche ist: Wenn der Unterschied AB der beyden Seiten eines Rechtecks und die Größe desselben gegeben ist, die Seiten zu finden."

Diese Bemerkung für die dritte und vierte Aufgabe paßt offenbar eben so gut für die erste und zweyte. Die Proposition der dritten Aufgabe ist offenbar mit der der ersten, und die Proposition der vierten mit der der zweyten einerley. Denn es ist einerley, ob der Inhalt des zu beschreibenden Rechtecks in Gestalt eines Quadrats oder in Gestalt eines Rechtecks gegeben ist, oder in Gestalt irgend einer andern geradlinigen Figur gegeben wäre. Ich habe daher nur die beyden ersten Aufgaben in meine Sammlung aufgenommen.

R. Simson ist keineswegs zu tadeln, daß er die Propositionen der vier Aufgaben auf die schwerfälligere und nicht auf die (von ihm selbst bemerkte) leichtere Art ausgesprochen hat, da er sie als besondere Fälle der citirten Euklidischen Aufgaben hinzufügen wollte. Der Sinn derselben ist nämlich der, daß (Fig. 216) BGHK ein Quadrat und AGKI von der verlangten Größe, so wie (Fig. 217) BGHK ein Quadrat und AGHI von der verlangten Größe sey. Doch mag ich hier die Bemerkung nicht unterdrücken, daß eigentlich das Interesse, das ein Lehrsatz oder eine Aufgabe an sich haben (abgesehen davon, daß sie einem späteren Satze zur Grundlage dienen), auf der Art beruht, wie die Proposition derselben ausgesprochen wird. Während die Aufgaben (Art. 227 und 228) nach der Proposition des R. Simson fast uninteressant erscheinen, gewähren sie so, wie in dieser Sammlung, ausgesprochen, ein ziemliches Interesse. Hier handelt es sich von einer gegenseitigen Beziehung des Inhalts, Umfangs und der Gestalt des Rechtecks; dort hingegen weiß man nicht recht, wo die Aufgabe hinaus will. — Mancher Artikel in dieser Sammlung, der vielleicht jetzt sehr wenig Interesse an sich gewährt, würde sehr daran gewinnen, wenn die Proposition besser ausgedrückt wäre.

Art. 229. Aufg. In ein gegebenes Quadrat ein reguläres Achteck zu beschreiben. [Art. 67].

Aufl. (Fig. 218). ABCD sey das gegebene Quadrat. Man ziehe die beyden Diagonalen BD und AC; so halbiren sich diese gegenseitig in ihrer Mitte E (Art. 67). Hierauf mache man AH = AL = DI = DF = CG = CM = BN = BK = AE, und ziehe KI, LG, FN und MH; so ist KILGFNMH das verlangte reguläre Achteck.

Bew. 1. Der Beweis, daß alle acht Winkel einander gleich sind, ist leicht.

2. Es ist also noch zu beweisen, daß auch die Seiten einander gleich seyen.

Es ist $AE^2 = \frac{1}{2} AD^2$, also

$$AL = AE = AD.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

daher

$$DL = AD - AL = AD - AD.\sqrt{\tfrac{1}{2}} = AD\,(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$$
$$DL^2 = AD^2\,(1 - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}) = AD^2\,(\tfrac{3}{2} - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$
$$LG^2 = 2.\,DL^2 = AD^2\,(3 - 4\sqrt{\tfrac{1}{2}}).$$

Und es ist

$$IL = AL - AI = AL - DL$$
$$= AD.\sqrt{\tfrac{1}{2}} - AD + AD.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$= AD\,(2\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 1)$$

daher

$$IL^2 = AD^2\,(4.\tfrac{1}{2} - 4\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 1)$$
$$= AD^2\,(3 - 4\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

Folglich ist

$$LG^2 = IL^2$$

also auch

$$LG = IL.$$

Anm. Diese einfache Construction des regulären Achtecks findet sich in einer der Maschinen-Zeichnung gewidmeten, vorzüglich schön ausgestatteten, Schrift, betitelt: an Essay on mechanical drawing by Charles Blunt, London 1811, das. p. 9.

Staatsbibliothek MÜNCHEN

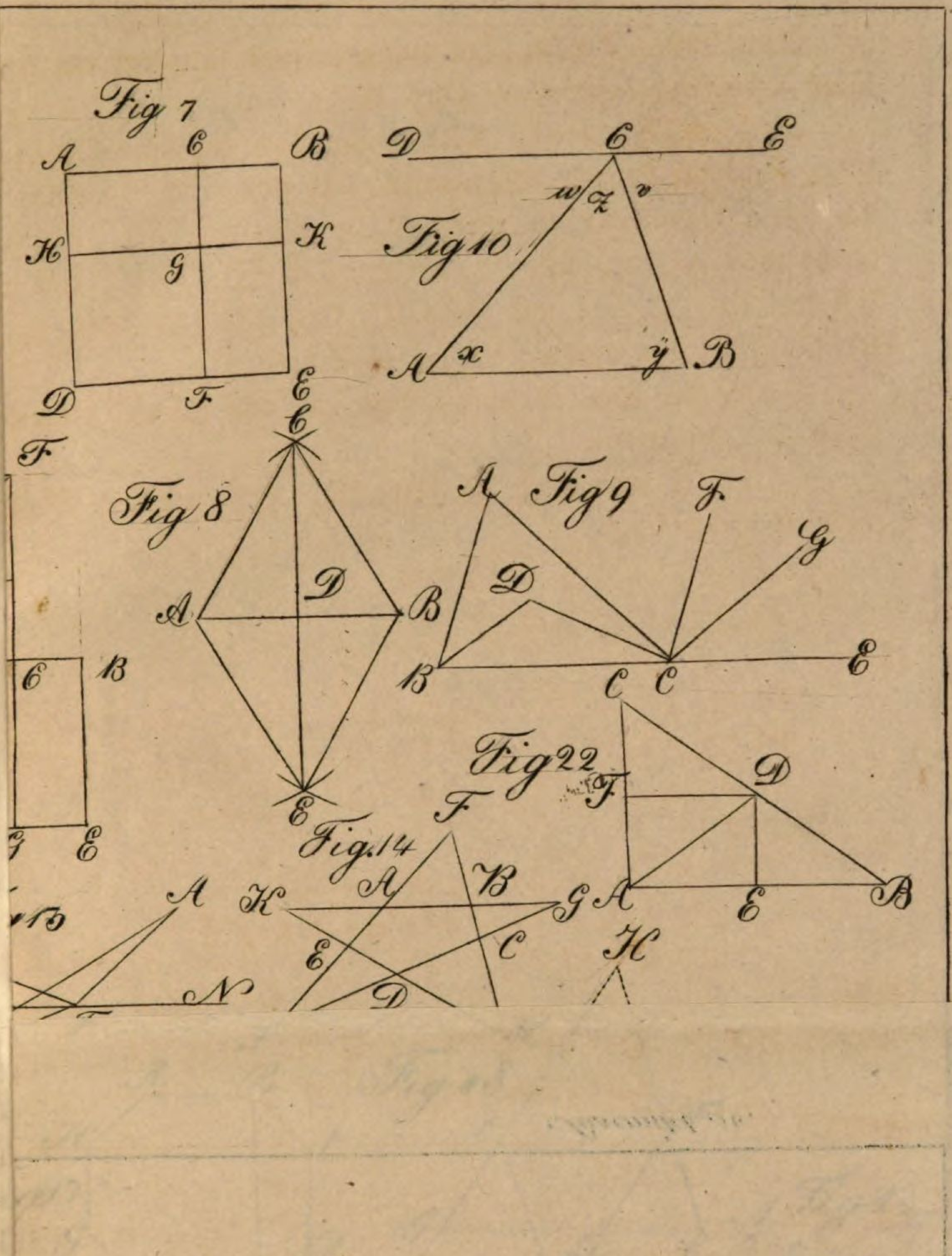


Fig 7
A
C
B
H
G
K
D
F
Fig 10
D
C
E
w
z
v
A
x
y
B
Fig 8
E
C
A
D
B
Fig 9
A
F
G
D
B
C
C
E
Fig 22
F
D
A
E
B
Fig. 14
F
K
A
B
G
E
C
D
H
N

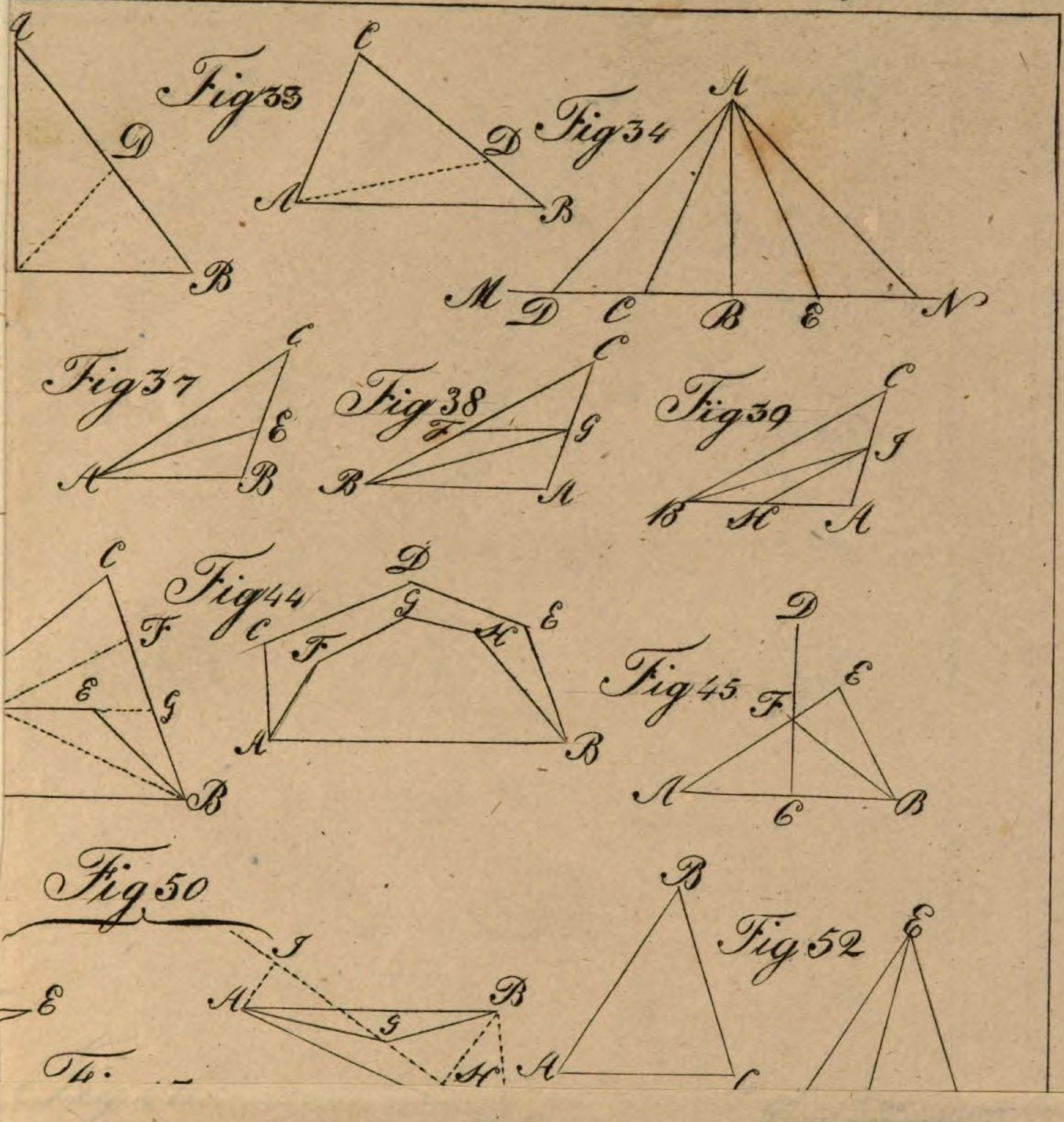


Fig 33
Fig 34
Fig 37
Fig 38
Fig 39
Fig 44
Fig 45
Fig 50
Fig 52

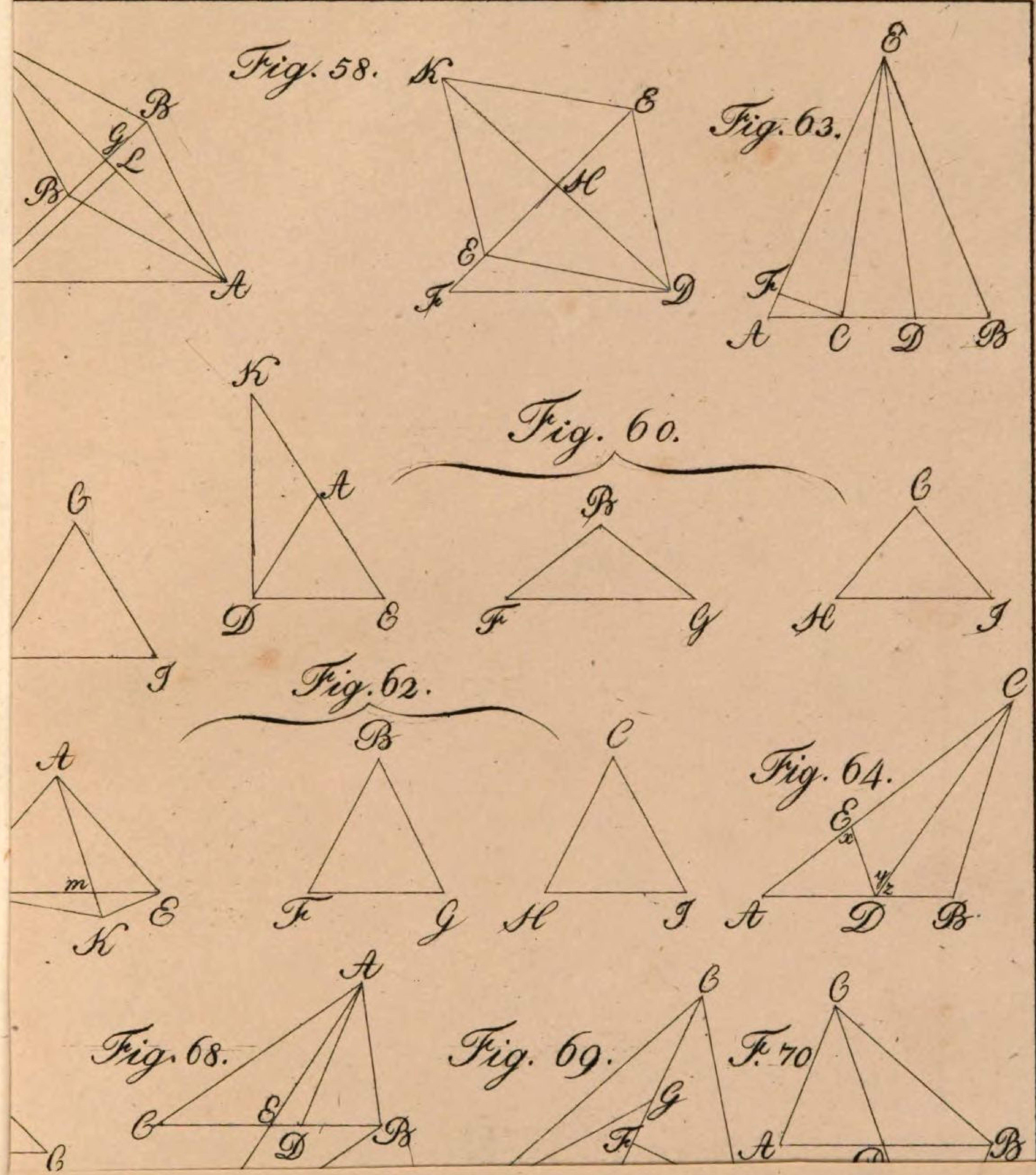


Fig. 58.
Fig. 63.
Fig. 60.
Fig. 62.
Fig. 64.
Fig. 68.
Fig. 69.
F. 70

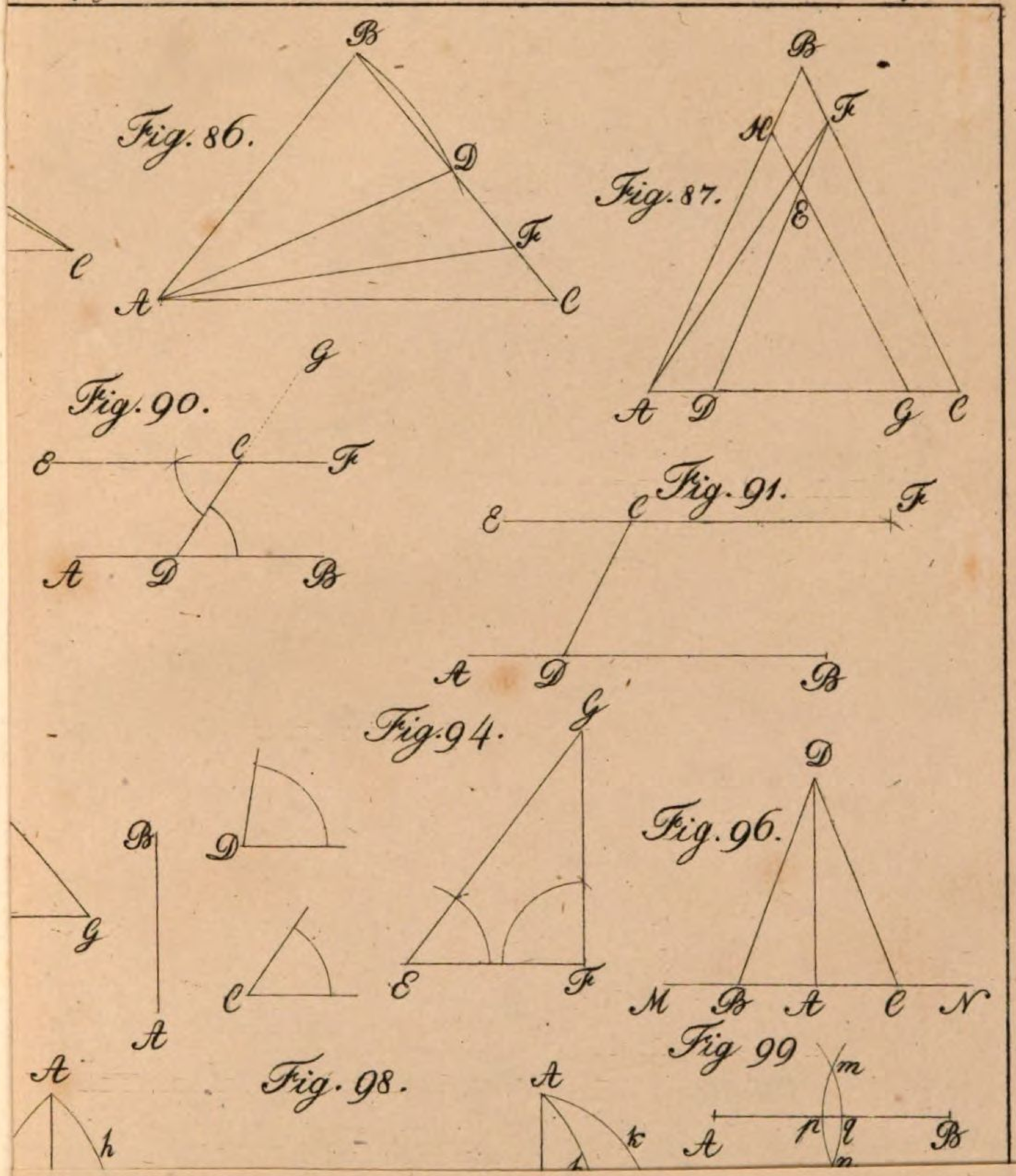


Fig. 86.
B
D
F
A
C
Fig. 87.
B
H
F
E
A D G C
Fig. 90.
G
E C F
A D B
Fig. 91.
E C F
A D B
Fig. 94.
G
E F
B
D
C
A
Fig. 96.
D
M B A C N
Fig 99
m
A p q B
n
Fig. 98.
A
h
A
k

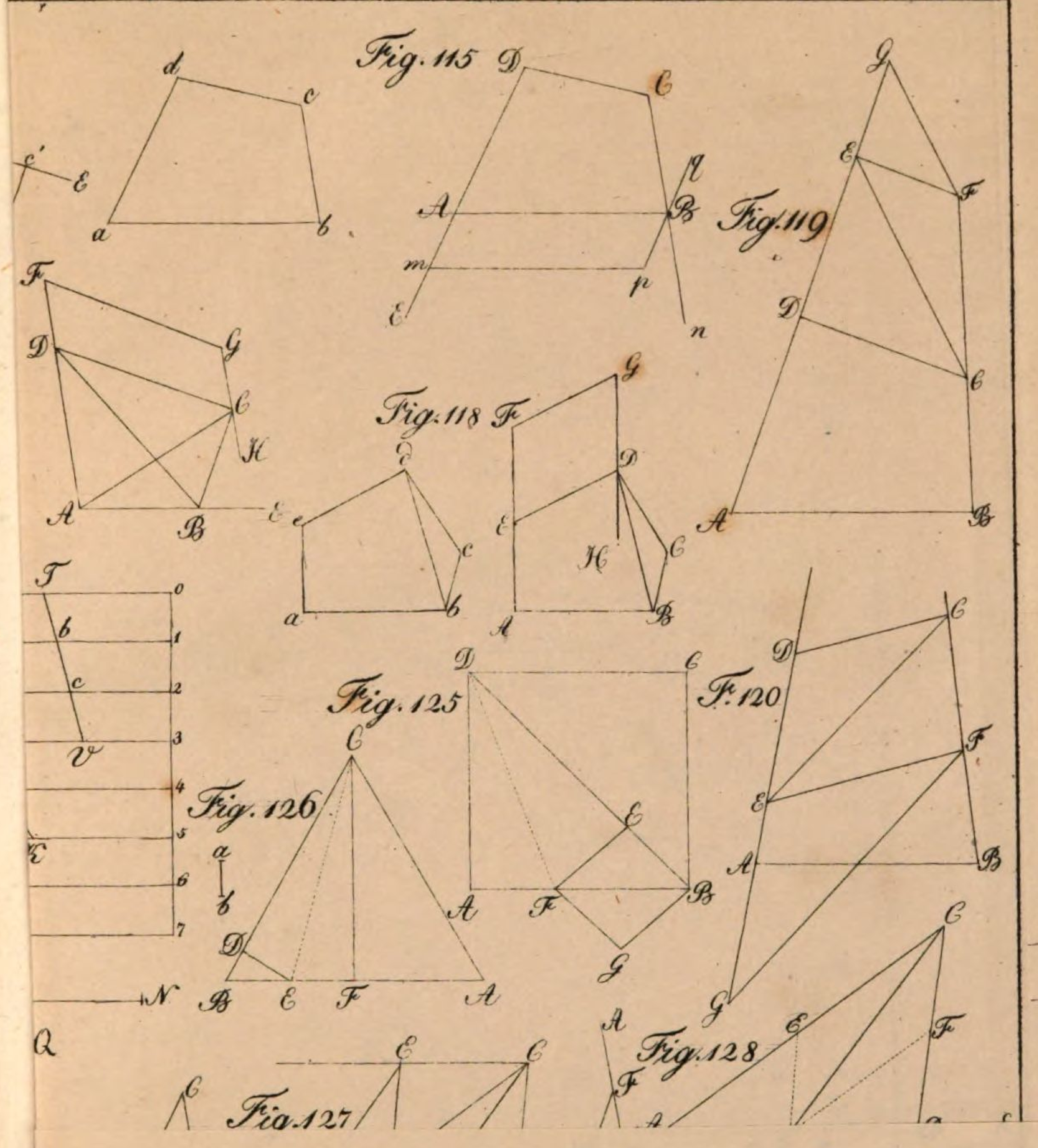


Fig. 115
Fig. 118
Fig. 119
F. 120
Fig. 125
Fig. 126
Fig. 127
Fig. 128

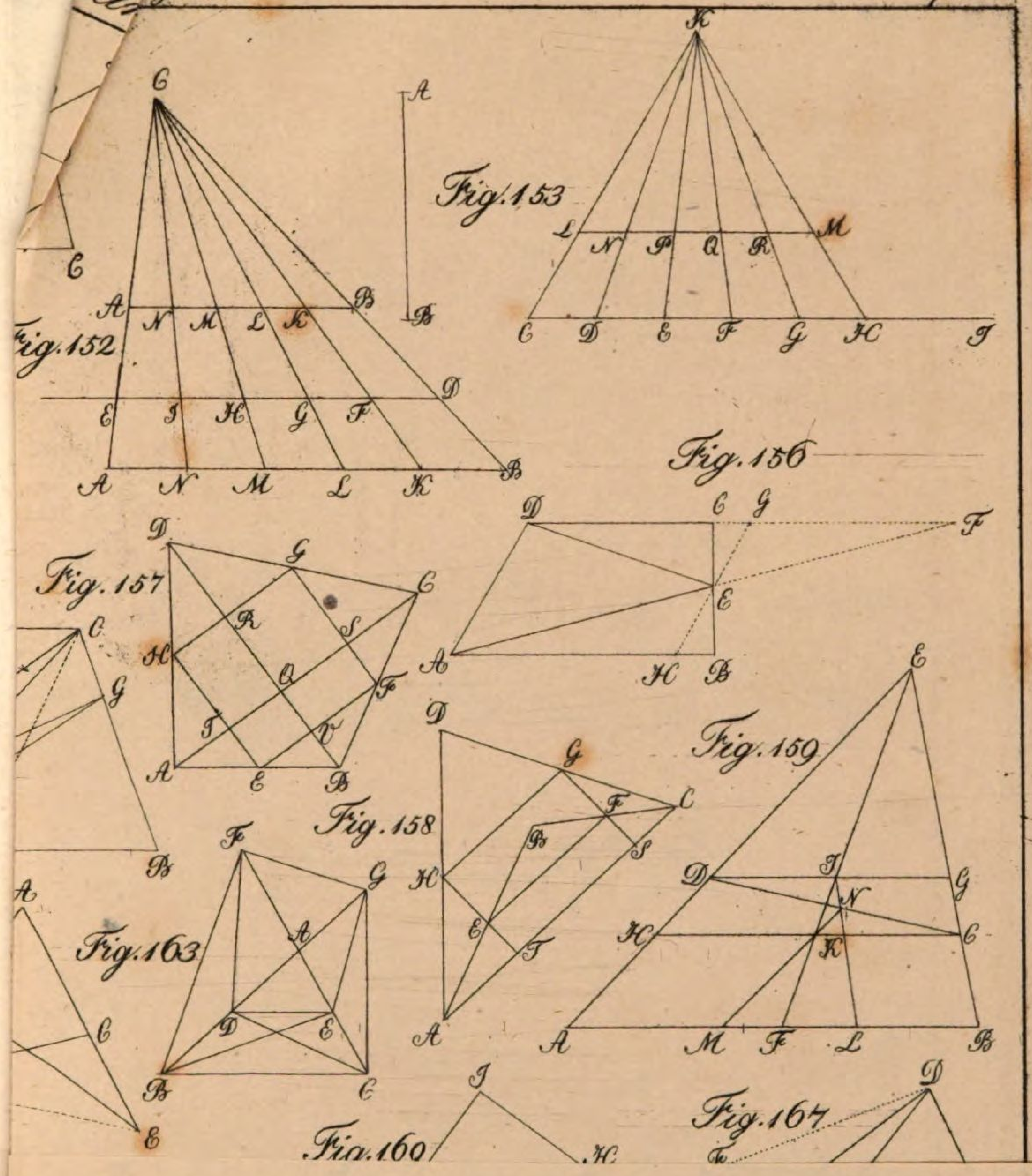


Fig. 152
Fig. 153
Fig. 156
Fig. 157
Fig. 158
Fig. 159
Fig. 160
Fig. 163
Fig. 167

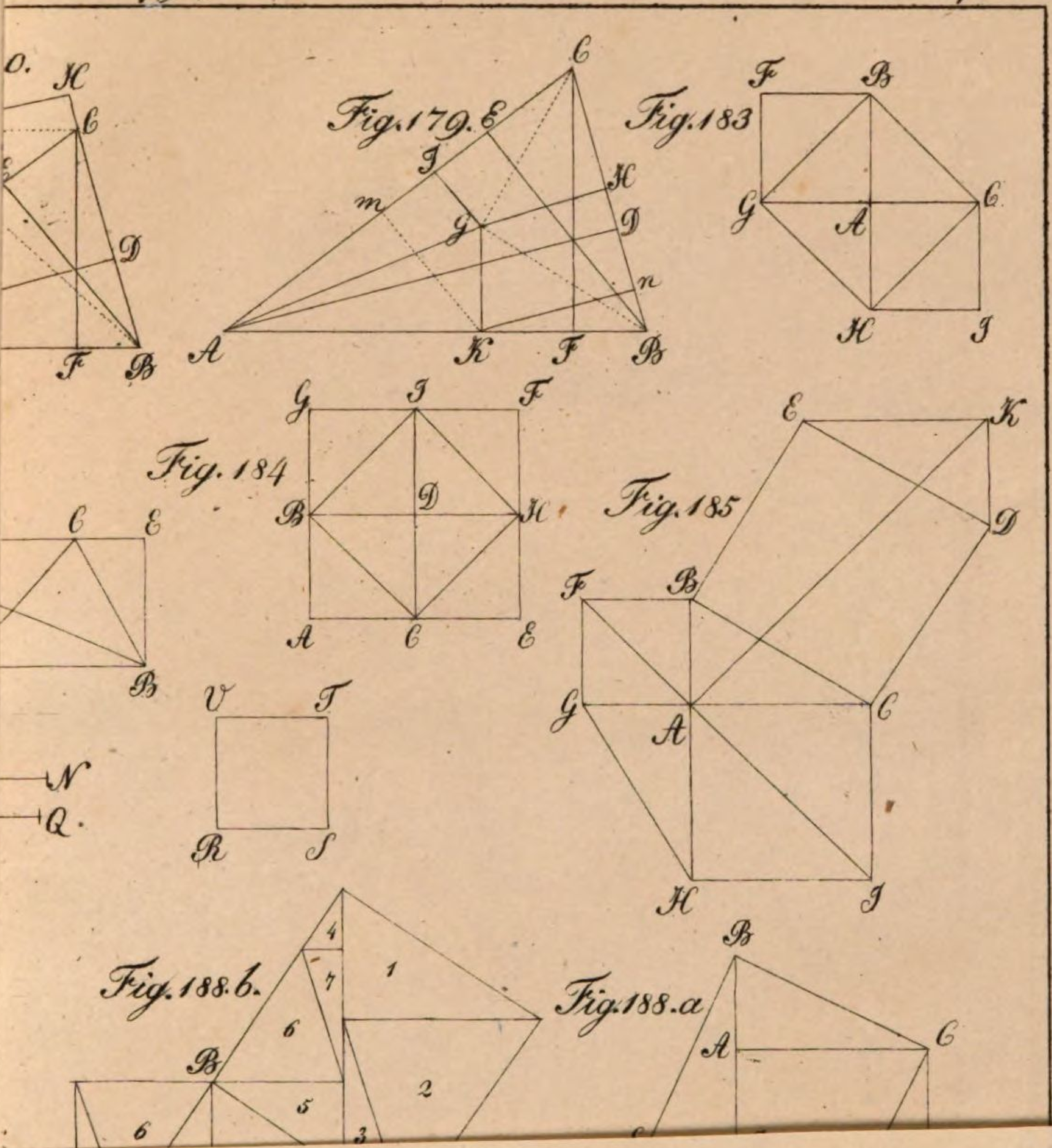
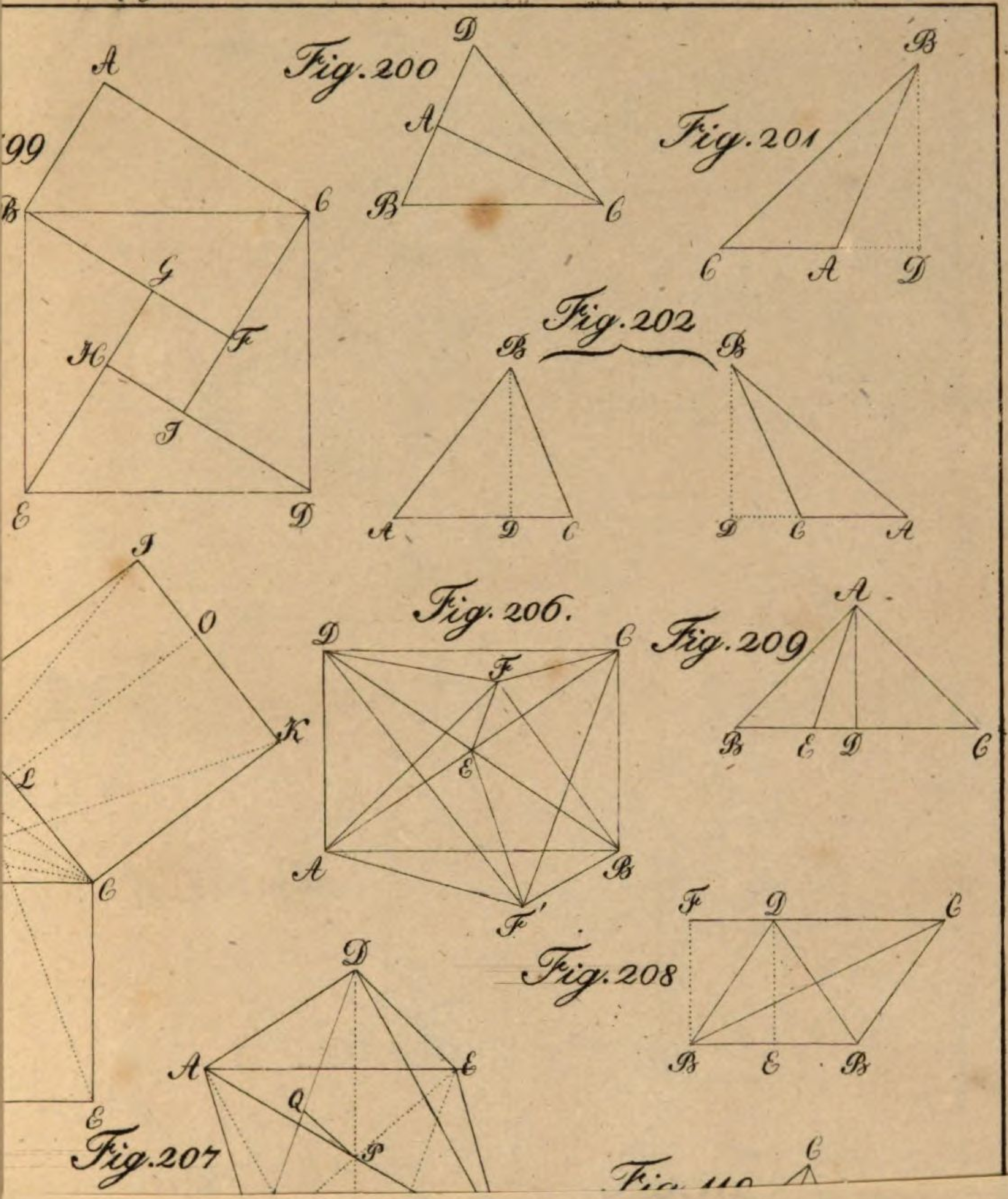


Fig. 179.
Fig. 183
Fig. 184
Fig. 185
Fig. 188.b.
Fig. 188.a


…99
Fig. 200
Fig. 201
Fig. 202
Fig. 206.
Fig. 209
Fig. 208
Fig. 207

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Thilo, Ludwig

Materialien für den Unterricht in der Elementar-Geometrie

Bd.: 1,1. T. 1, Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze mit synthetis
chen Auflösungen und Beweisen,

Frankfurt a. M. 1824

Math.p. 740 n-1,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083285-2